14. 2. H. 21

Euclidis elemẽtorum

LIBER DECIMVS, PETRO Montaureo interprete.

Ad Ioannem Bellaium Cardinalem.

BIBLIOTECA NAZ. ROMA VITTORIO EMANUELE

LVTETIAE

Apud Vaſcoſanum, uia Iacobæa ad inſigne Fontis.

M. D. LI.

CVM PRIVILEGIO.

PRIVILEGII SENTENTIA.

Regio diplomate cautum eſt, ne quis alius præter Vaſcoſanum hunc Euclidis *elementorum librum decimum, interprete* Petro Montaureo *uiro ſenatorio ante ſexennium imprimat, néue uendat. Qui ſecus fecerit, libris & pœna in ſanctione æſtimata multabitur. Datum* Bleſis *decimo Calendas* Februarij M. D. L.

De Moulins.

AD IO. BELLAIVM CARDInalem Petri Montaurei PRÆFATIO.

CVm ad inſitam mihi magno naturę erga me beneficio incredibilem diſcendi cupiditatem, illud quoq; iudicium progrediente ſenſim ætatę ſtudióque confirmatum acceſſiſſet, nihil eſſe tam uehementer homini expetendum, quàm rerum maximarum perceptam habere naturam, feci nõ inuitus adhuc, ut quò uocaret illa, eò me deduci facile paterer: in idq; uitæ curriculum immitti, quod & dignitati hominis conuenientiſſimũ, & naturæ præterea meæ accommodatum eſſet. huius uerò conſilij tantum abeſſe uideo ut me pœnitere cœperit, ut maiores etiam quotidie uberioréſque fructus mihi non contingere tantum ipſe ſentiam, ſed & deinceps multo præſtãtiores perceptum iri certo ſperem. Nam quanto in altum longius euehimur, tanto laborẽ minui magis, qui maximus in cuiuſque rei principiis ſolet eſſe, animi uero uoluptatẽ nulla alia re tantũ, quã diſcẽdo ali augeríque cognoſcimus. Is autem meus in ſuſcipiẽdo uitæ genere ſenſus cum uniuerſę philoſophię ſtudium mihi proponeret amplectẽdum, ſimul animo ſubiiciebat illud, nihil in ea re magnopere profici poſſe, niſi quis ueterum philoſophorum ueſtigia ſumma diligentia perſequutus,

BIBLIOTECA NAZ. VITTORIO EMANUELE ROMA

eandem quam ipſi, uiam inſtitiſſet. Itaq; nihil, ut hoc quidem loco dicam de noſtris cæterarũ philoſophiæ partium ſtudiis, ad mathematicam cognitionem animum applicans, in eum me locum ſenſim abductum diuertiſſe intelligo, unde ſuſcepti primum inſtitutique illius itineris recordatio propemodum effluxerit: neque id uero repugnante me admodum. Quid enim eſt, cum ex ea philoſophię parte, quæ omnis eſt in agendi rationibus occupata, tantum præceptorum acceperis, quãtum ad unius hominis reíque priuatę cuiuſq; ſuę actionem attinet, unde maior animum ueri cupiditate flagrantiſſimũ permulcere poſſit oblectatio, quàm quæ ueri cognitionem ſubſequi ſolet. Nam illa quidem ſtudia ciuilis diſciplinę, quę publicis rebus conſilio adminiſtrandis idonea totius hominum uitę multo pręſtantiſſimas actiones ex recto rationis præſcripto moderari debuerant, plane refrixerunt: tanta profecto perturbatione rerum omnium, ut cuius ſcientię ratio clauum aliquando in rerumpub. gubernatione magna cum ſua laude, hominũ uero longe maxima felicitate, curſúque proſpero tenuerit, eidem nũc ſit uix aliquid relictũ in ſentina loci. Tertia quædam ſupererat illa philoſophãdi exercitatio, quæ naturam rerum perſequens, ut eſt omnium ingeniorum cognitione digniſſima, ita propter multiplices ipſius materiæ formas & motus incõſtantes, acutum quoddam habet & ſubtile diſputan-

di

di genus, ſed obſcurum tamẽ, adeóque repugnantes inter ſe ſummorum philoſophorum ſententias, ut ueriſimilia tantum, non etiam uera docere uideri poſſit. Vna ergo eſt mathematicarũ rerum tractatio, quæ conſtantibus neceſſariiſque ducta principiis, uias quoque conſimiles perſecuta, eò nos progredientes manu ueluti ducit, ubi ueritatis ipſius cubilia, quæ quidem mẽtibus humanis ſua ipſarum ui facultateq; cerni queãt, explicet intuenda. Quid autem eſt, quod hac una re præſtantius magnificentiúſque dici poſſit? An quid erit aliud, quod cuiquam anteuertendũ uideri queat? Tibi certe non arbitror, Bellai ampliſſime, cui neque ad acumen ingenij doctrinę cultum, neque ad doctrinam iudicij uim deeſſe intelligo. Quæ cum ita ſint in te illuſtria, ut fortunæ tuę, illius quidem per ſe ſplendidę, luminibus ego unus omnium minime blandus fortunę admirator offeciſſe putem, tibi homini grauiſſimo, idoneóque uiſo de tota noſtra ratione iudiciíque ſenſu perſcribam paulo liberius: ſi forte plus authoritatis ex perſonę tuę dignitate noſtra habitura eſt oratio, ut ſane habitura eſt, ad iuuentutem in eum ſtudiorũ curſum, quem ualde uolumus, inducendam. Verum enim, ut ipſe tecum, hoc eſt cum homine intelligente loquar, iampridem errabunde de uia deflexímus: ueterémque illam diſcendi conſuetudinem prę ſtudiis quibuſdam nouis amiſimus. Hîc cũ plurima quę recte dici poſ-

ſint,omittenda ducam,unum illud quidem certe
nunc maxime mihi dicẽdum eſt,illius perturba-
tionis,de qua paulo ante diximus,eã eſſe cauſam,
& potiſſimã quidem, quòd totius inſtitutionis,
quàm à pueris παιδείαν ueteres illi ueritatis magi-
ſtri uocare ſoliti ſunt,priſcis quondam te ſeculis
tantopere conſeruatę,ea eſt, hac quidem ætate,
peruerſitas,ut quod primum potiſſimúmque ſtu
diorum eſſe debuerat, perexignũ quidem omni-
no locum apud nos,plurimorum autem homi-
num iudiciis nullam etiam dignitatis æſtimatio-
níſque partem mereatur aut obtineat.Quid ergo
eſt?dicat aliquis, quid habes quod reprehendas?
Ego uero permulta, pene dixi omnia, ut iam in-
dubitãter illud affirmare poſſim,tum demũ opti-
me rebus hominum conſultũ iri,cum illud poë-
tarum ὕστερον πρότερον ipſi in ſuas actiones tranſtule
rint: quódque primum ducunt,poſtremũ habue-
runt,& quod poſtremo,aut,ut uerius dicam,nul-
lo loco ipſis eſt,ſi primum exiſtimauerunt. Nunc
unius artis , uixdum etiã artis præſidiis opibúſq;
immodicis tam flagitioſe circũuenti tãtis clamo-
ribus obtundimur, ut naturæ uox ad ſcientiæ cu-
piditatem inuitantis, ne exaudiri quidem ulla
ratione queat.Quæ ſi loco ſuo cõtenta non ſe cõ-
mouiſſet,diiudicandíſque hominum litibus oc-
cupata munus alienum aut nũquam appetiiſſet,
aut certe non impediiſſet,minus profectò habe-
remus quod dolẽdum uideretur: eſt enim & iu-

 diciis

diciis accommodata: iudicia porro ipſa diſcepta-
tionibus rerum controuerſarũ, quibus carere nul
lo modo poſſumus, pernecceſſaria. Neque ſane eſt
in ea re quod reprehẽdi iure poſſit, ſi quis morem
maiorum in illa conſequẽda retineat, ut philoſo-
phiæ totius inſtitutis abunde ſuppeditatis, hanc
ipſam illius quidem imitationẽ quandã & quaſi
ſobolem aggrediatur diſcere, cum intellexerit id
quod in genere ſciẽtiarum eſt perpetuum, ut aliis
aliæ ſubſint, idem ipſum hîc quoque fieri, ut iu-
riſperitia philoſophię partẽ illam, quę eſt de mo-
ribus tum ſingulorum tum uniuerſorũ, tãquam
architectam agnoſcat & obſeruet. Sed hæc tota
cõtrouerſorum ratio iudiciorum illius partis eſt
iuſtitię, quæ συναλλάγματα tantum continet. Nam
de altera illa quæ multo eſt & dignitate præſtan-
tior & utilitate in omnem uitę ſocietatem ube-
rior, quæ præmia recte factis, pœnáſque ſceleri-
bus pro rata cuiúſque rei perſonęq; portione di-
ſtribuens, duo uincula rerumpub. firmiſſima cõ-
plectitur, aut omnino de iuſti ipſius ui atque na-
tura, ne literam quidem: ſe tamen ueram philo-
ſophiam profiteri rerúmq; maximam guberna-
tioni unam idoneam prædicans, illam ipſam phi
loſophiam, cum omnium artium parentem, tum
uero erga ſe beneficentiſsimã magiſtrámque ui-
tę certiſſimam lędens, dignitatis inuadit poſſeſ-
ſionẽ alienę: neque ſe animaduertit (ne quid ipſe
crimino ſius dicam) alienum appetentem contra

ſua ipſius, quid autem dico ſua? imò magis cōtrā rationis uniuerſę decreta, cuique ſuū minime tribuere: quámque matris loco uereri debuerat ab ipſa genita & educata, unde ſuum aliquem in repub. locum ut tenere poſſet, habuerat, quod in parentes impij filij ſolent, ipſi quaſi ſenectute deſipienti, ut bonorum ſuorum adminiſtrationi interdiceretur, efficere. Nā ſi nihil aliud eſſet, quis quæſo remigem in naui ferat gubernatoris munus arrogāter affectantem? Iam uero ut à primis ordiamur, hæc totas urbes ſuis ſacris initiorúmque pertractationi cōſecratas habet: ad quas undique concurſus puerorum iuuenúmq; fiant, nō tam diſcendi, quàm à magiſtris diſcedendi cupidorum: ſic ætas maxime imbecilla, ſuíque impotens, effrenis, incuſtodita, ſuo unius impetu ferenda permittitur, quam unam alieno parētem imperio, authoritate bonorum nixam, inſolētiæ, leuitati, audacię, uoluptati frenum cęteris etiā animorum motibus modum imponendum eſſe maxime doceri oportuit: hiſque uocibus aſſidue aures illius perſonare, ut concurſantes immenſique cupiditatum æſtus, quibus ætas illa plurimū nata eſt commoueri, reprimerētur. At enim qui recte præcipiāt, doceántq; prę ſto ſunt, ſi modo eos audire in animum induxerint. Credo ſane, quod ad illorum artem attinet, ut eſt captus horum hominum & temporum, non indiligenter exponere teſtamēta, ſubſtitutiones, obligationes, ſtipulationes,

lationes. Sed quid hæc ad mores informãdos? Ita fit ut alij ne audiantur quidem, propter abhorrentem ab illis ſtudiis multorum ingeniorum naturam: alij quãuis ſtudioſe ſoleant audiri, tamẽ uel rei ipſius per ſe æſtuoſę traditione perplexa, uel docendi imperitia præpediti, nihilo doctiores amittant auditores, quã acceperint. Ex quo illud malum interea ſequi omnino neceſſe eſt in iuuenum animis, cum uoluptates ex doctrina inſtitutionéque liberales ipſi non habeant, ut conſectandis alienis illiberalibúſq; totos ſeſe dedant: prorſus enim eos aliquid agere quietémque contemnere, neceſſe eſt. Pauci quidã ex illo ſunt genere, qui glorię, neſcio cuius, utilitatíſque expectatione deliniti, è toto ſtudiorum ſuorum quinquennio fructus tenues illos quidem & auſteros, ſed quęſitos tamen colligant. Præclara uero res, hominem natura quidẽ ipſum ſua nullius uirtutis, uitiíue pręſentia habitúue fretum, uerum facultatibus nudis in utrãuis partem ferentibus, præditum, magis tamen improbãdorũ exemplorum multitudine, opinionúmque peruerſitate deprauatum: cum opes, honores, diuitias præcipue duxerit expetendas, ad alendum morbum ex contagione contractum. artem etiam per omne uitę tempus exercẽdam adhibere: cuius tota ratio diſputandi ſit de meo & tuo: déque iis rebus & modis, quibus quod meum eſt, tuum effici poſſit. Ad quam quidem diſciplinã nimis multos docilio-

res reddi ſcimus, quàm ſocietati hominũ conducat tranquille conſtantérque moderandę. Ita credo priſcos illos non tam antiquitate quàm dignitate memorabiles uiros, domi foríſq; in ſua quęque ciuitate rerum geſtarum gloria pręſtantes, liberos ſuos ad maiorum imitationẽ inſtituiſſe: ac non potius Athenas, Rhodum, Maſſiliam, & quò non? ad cultum ingenij capeſſendum, mercaturámque artium optimarum dimiſiſſe. Vnde philoſophię pręceptis inſtructi, cum ſe ipſi regere didiciſſent, agendíſque rebus adhiberentur, non ex artis illius formulis, ſed ex iuſtitię ſcitis immutabilibus hominum cœtus, & quidem uolentiũ, regendos acciperent. Age modo, hunc ipſum hominem ex hac noſtra exercitatione, tali cultu educationéque in forum ex umbra tanquã in aciem producamus: ut ſtudij ſui rationẽ & uſum aliquẽ nobis tandem explicet. Ibi uero quanta prudentia, grauitate, conſtantia, probitate ſe gerat, dicere meũ non eſt. Vos quæſo dicite Pierides, & quidem hominibus ignaris: nobis enim nihil attinet, quos plura ſcire neceſſe eſt, quàm referre iuuet. hoc tãtum dicam, cum ſe exiſtiment parum in ea arte profecturos, niſi toti ſint in illius cognitione per omnem uitę curſum occupati, tantúmque ſibi periiſſe temporis, quantũ aliis ſtudiis acceſſant, homines ignorantes quantũ cuique ſciẽtię temporis ſit tribuẽdum, nimis magnam mercedem ſtatuũt, ſi pręſtantiſſimarum rerum, offi-

 cij

cij dico muneríſq; ſui ignoratione, hæc una fortuitarum rerũ cognitio diſceptatrix ſibi ipſis cõparanda uideatur: neque uero intelligunt rei per ſe infinitę finem nullũ reperiri poſſe. Verùm ipſe me longius ſcribendo prouectum in offenſiones multorum incurriſſe uideo, quod equidem nollem: ſed cum nulla remedia tam faciãt dolorem quàm quę ſunt ſalutaria, ſi quid eſt quod ſanari poſſit, plus apud me ualere debere nonnullorum ſalutem quàm plurimorum indignationẽ ex remediorum acerbitate collectã ſemper exiſtimaui. Quod cũ optimis quibuſque uiris, quales iam bene multos hic noſter ordo recipit, probatũ iri certo ſciam, de cęteris minus eſt mihi laborandũ. Atque haud ſcio an quę auditu nunc quidẽ grauia acerbáque uideãtur, ipſis in experiundo ſuauiſſima futura ſint: ut longior oratio comprobãdę rationis huius cauſa defenſióque nulla requiratur alia, niſi quã rei ipſius intellectę perceptio attulerit. Neque quenquam accepimus aut uidimus, qui, cum utrãque ſcientiam tenuiſſet, non utrãque adamaret: alteram uero nobiſcum etiã admirationi maximę ſummóque ſtudio non habuiſſet. Porro alterius expertem & ignarum, de utraque iudicium ſuum eſſe uelle iniurium eſt. Pręterea fuit ea profecto ſemper grauiſſimorum eruditiſſimorúmque hominum omnibus ſeculis de tota uitę ratione conſenſio, cum expetendarũ rerum tria ſumma genera reperirẽtur, ut bono-

rum animi prima potiſſimáq; eſſet dignatio: cæterorum autem, ut quęque proxime nos attingerent. Ex quo illud efficeretur neceſſario, ſcientiarum quoque quæ bonorum adipiſcēdorum uias perſequerentur & traderent, eandem eſſe debere rationem: ut cuiuſque rei prętantiſſima uis eſſet, ita ſcientię, cui res ea ſubiiceretur, illi plurimum & tēporis & induſtrię noſtrę deberetur. Ad quā ſane normam ſi ſtudia noſtrorum hominum ab ipſis exigerentur, & firmior animorum tranquillitas, & uero maior ex ipſis in repub. eſſet utilitas: eiúſque mali, cuius mole propemodum obruti leuationem aliquam iampridem expoſcimus, medicinam non leuem haberemus: cum non eſſent qui litigioſorum hominum audaciam, flagitium, furorem inconſultis ſuis conſiliis adiuuantes, aut potius ipſos inter ſeſe miſerrimo concertationū genere committentes, alienis incōmodis ad ſuas utilitates per iuſtitię conſeruandę ſpeciem abuti uellēt: quódque rerum omnium pręcipuum eſt, illud boni pręterea conſequerētur, ut improbitas uirtuti ſuo loco dignitatíque reſtitutę in rerū adminiſtratione facile cōcederet. hoc enim munus eſſe philoſophię unius maxime proprium, humanarum rerum artem moderandarū diuinarúmque ſcientiam tradere quis non uidet? qui modo rem ullam unquā mentis acie perceperit? Ne forte homines rerum omnium imperiti criminētur eam otij tantum eſſe, nō item negotij. Cuius quidem

 dem

dem calumnię perfacilis eſſet mihi quoque refellendę ratio, niſi rem huius loci, aut operis nõ eſſe intelligerem: ipſam tamen etiam ſcriptis grauiſſimis cuiuſque ætatis hominũ prudentiſſimorum agitatã, tum uero unius Iacobi Sadoleti uiri præſtantiſſimi doctiſſimíque libello pereleganti, ab eo perſcripto tanta diligentia & eruditione, ut maiore ſcribi poſſe non exiſtimem. Quòd ſi exẽplis agẽdum eſſet, nonne permultos omnibus hiſtorię monimentis celebratos accepimus, qui ſtudia doctrinę ad rerumpub. moderationem conferentes, ciuitatum ſuarum ſtatum ab initio conſtituerint, cõſeruauerint, perditúmque reſtituerint, tanta omniũ gentium admiratione, ut ſummis etiam honoribus deferendis magnitudinem meritorum aſſequi ſe nullo modo poſſe faterentur? Quid enim? (ut uetera omittamus) nũquid unquam grauiſſimum ſanctiſſimúmq; iſtud ueſtrum cardinalium collegium pœnituit, quantũ dignitatis ornamentíque ex duorum hominum ſtudiis, uirtute prudentiáque percepiſſet, Gaſparis Contareni, & huius ipſius, de quo modo dixi, Sadoleti? Quorũ ille per omnes pene gradus honorum in moderatiſſima florẽtiſſimáque Venetorum repub. peruagatus, ſuis ciuibus ita ſe probauit, ut pręſentem colerent & admirarẽtur: abſentem etiam propter ſingularis uirtutis memoriam permanentem requirerent, uobíſque ipſis, qui abs ſe ciuem totius ciuitatis optimum nihil

tale ambientem aut omnino cogitantem abduxiſſetis,pene inuiderent.Et ſane fuit ille uir omni laude cumulatus,tum propter excellenté doctrinam, tum etiam probitatem & prudentiam multarum gentium imperio digniſſimus:hic uero alter magis eſt otio delectatus, nõ illo quidé inani, ſed fructuoſo in omnem poſteritaté & literato. Quid de Petro Bembo & Nicolao Ridolfo uiris certe in omni uirtutum genere maximis dicam? Libétius autem in commemoratione mortuorũ noſtra uerſatur oratio,ne quid aſſentationi uiuorum tribuiſſe iudicetur,ſi eorũ qui nunc ſunt, laudationes attingeret. Hi quidé in philoſophię ſinu ſtatim à pueris educati tales ad rempub.cum acceſſiſſent, utilitates ex ſe permagnas uniuerſo quidem hominũ generi maxime,ſibi uero ipſis immortalitatem præterea glorię cõpararunt. Quorum ſi qui ſtudia imitatione cõſequuti erunt,quî fieri poteſt,ut reſpub.non maximam ſuę dignitatis recipiendę ſpem in illorum prudentia & moderatione ſibi repoſitam arbitretur?Ac profecto fuit tempus illud ſane mihi periucũdum,cũ ſpes eſſet melius fore, propter alacritaté animorũ in id ſtadium ſeſe dedentiũ, quod eſt ad ueram gloriam expeditiſſimum : niſi permultorum ſtudia cogitationéſque in alia traduxiſſet ſua ipſorũ crédulitas,neſcio cuius hominis uanitati aſſentientium.Itáne uero?quo quęque uox proferetur abſurdior eo facilius in animis noſtris uiam ad perſuadendum

ſuadendum inueniet? Ergo repertus eſt,ſi diis placet,qui cum bellum nefarium omnibus bonis artibus indixiſſet,& ſapientię fructū iam plane maxima bonorum omnium gratulatione renaſcentis nobis inuideret, Lutetię in luce atque oculis nō Gallię modo, ſed totius Europę caſtra figeret ignorantię: & uniuerſę philoſophię uitęq; adeo è philoſophia conſtituendę authorē Ariſtotelē oppugnatum palam etiam accederet, nihil in dialecticis,nihil in phyſicis,nihil uſquam ueri uidiſſe aut tradidiſſe argueret. Audax negotium dicerem & impudens, niſi uerborum omniū acerbitatem rei ipſius per ſe inauditę neque tam audiendę indignitas ipſa ſuperaret. O imperitos maiores noſtros,qui nunquam quiuerūt iſtud animo intelligere! Quid eſt quod profectum eſſe dicam recenti ſophiſtarum clade, atque exilio,ſi ſophiſtas alios aſciſcimus? Quaſi uero non iam miſerrimam rerum omnium ignorationem deprecemur,ſed mutationem tantum in ipſis ignorantię magiſtris expetamus. At certe totum illud eiuſmodi eſt,ut cenſoria magis animaduerſione,quā cuiuſquam omnino contra diſputantes oratione reprimendum ſit. Neque uero de hac ipſa re uerbum ullū facturus eram, ſi moderatius inſaniendum ſibi putaſſet: ſuáque ipſe contentus iuuentutis credulę & rerū imperitę non augeret ignauiā: nam de ipſo quidem leuior omnino iactura fuerat. Im̄pune eſſe cuique debet periculo ſuo inſa-

nire: ſed cum ad aliorum perniciem morbus animi conuertitur, id uero ferendũ nõ eſt. Huic certe malo niſi maturis conſiliis obuiam eatur, & audaciſſimos impetus diligentia continuerit magiſtratuum, ne pręclara illa ſtudiorum nobis promiſſa compendia permagno conſtiterint iuuentuti: cum grauiſſima mercede totius temporis iactura didicerit nihil è nouis illis, ſed non ſatis eruditis magiſtris, interea niſi arrogantis cuiuſdã & confidentis ignorantiæ ignauięque pręcepta didiciſſe. Sed de hac re tota ſatis hactenus: aliàs fortaſſe pluribus, ſi commodum erit. Nũc autẽ quod eſt huius potiſſimũ loci & inſtituti perſequamur. Cum itaque, ut ante dictum eſt, mathematicã cognitionem uniuerſam iam tum à prima iuuentute uehementer amplexatus eſſem, & ſępius ipſe per me Euclidis elementa reuoluerem, in cęteris quidem libris modicus ſane labor mihi fuit: ubi uero decimum hũc multorum opinione perobſcurum attigiſſem, ea certe opinio non mediocri mihi quoque fraudi fuit, cum nõ arbitrarer, qui locus à pleriſque propter ſuſpectam ipſius difficultatem pręteriri ſolitus eſſet, mihi nõ periturũ, quicquid in eo laboris impendiſſem. Itaque plurima extrinſecus adiumenta mihi ipſe excogitãs, iterum atque iterum repetita diligenti lectione, cum nihilo minor maneret rei ipſius obſcuritas, cœpi cogitare unũ Euclidem in primis libris ſibi ipſi ad ipſorum intelligẽtiam ſufficere: neq; fieri

poſſe

poſſe, ut ſuum in docendo modũ atque ordinem repudians, hîc alienum quendam & nouum adhiberet. Vtq; uia ſimpliciori cum rem aggredi cœpiſſem, ſola librorum pręcedentium ipſius Euclidis ope, & uocum ſimpliciũ quæ ſunt huic libro maxime proprię, intelligentiâ, omnia uiſa ſunt quàm antea illuſtriora multo atque clariora: Euclidémque ſui ubique ſimilem hoc quoque libro ut olim cogitatione præceperam, nullius omnino rei externę indigentem, ſe ipſo contentũ: rem illam quidem paulominus inuulgatam, ſed alia ratione nulla, neq; alia uia, quàm ſua & familiari tradere plane uidi: hæc uero eſt, ut à rebus cognitis ad ignotas ſenſim progrediẽs ex prioribus rerum ſubſequentium comprobet intelligentiam, & ueritatem. Quæ cum perſpicerem, in eáque rẽ ſæpenumero uerſatus, magnáque animi intẽtione & ſtudio ſingulas quáſque res inter ſe conuenire, nihil collidere intelligerem, nullam moram ſtudiis hominum putaui, quantum per me effici poſſet, diutius afferendã, quin laboribus noſtris animíque exercitationibus fruerentur. Cúmque ex maiorum lucubrationibus, quo poſteritatem iuuaremus, aliquid uideremur cõſequuti, & quibus omnia deberemus nihil eſſet quod poſt mortem hominibus bene meritis gratius per nos referri poſſe uideretur, quàm ſi quorum induſtriã experti uehemẽter admiramur & ſuſpicimus, eorum etiam humanitatis exemplum ſtudiúmque

poſteritatis adiuuandę uellemus imitari, cœpi cō ſilium rei totius illuſtrandæ. Itaque Græcorum demonſtrationes interpretādo conſequutus, ſiue fuerint illę Euclidis ſingulorúmue geometrarum, quorum ſymbolis hoc totum eſt opus abſolutum, ſiue ἐκ τῶν Θέωνος συνουσιῶν, ubi preſſius ſubtiliúſque compoſitę uidebātur, fuſiore quodā ſcribēdi genere ita patefeciſſe me puto, ut lectori nō dormitanti, ſed attento nihil deeſſe poſſit ad rerū intelligētiam: obitérque uiam & rationem reſoluendi in primis theorema exemplorum copia notauimus. Sed quo res adhuc multis incognita cōmendetur uberius, placuit nonnulla ex ueterum libris, Procli in primis, arbitratu quidem noſtro ſumpta, Latinis literis illuſtrata proponere. quibus initiis mathematica ducta cognitio, quam altum ediderit rerum maximarū faſtigium: ut quā incredibilem ex ſe utilitatē ſeculis prioribus attulerit, eandem quoque ſibi de ipſa polliceantur homines, ſi modo penitius ea ſtudia inſpexerint: neque, quod adhuc factum eſt, in primo liminis aditu, uixdum quinque ſéxue paſſus (totidem enim libris uulgo contenti ſunt) in ea re progreſſi, reſtiterint. Illud itaque ſciendum eſt, quod finitum & infinitum dicitur, principia ſumma eſſe mathematicarum ſpecierum omnium. Nam ea principia inter ſe aliter atque aliter copulata, ſufficiunt ad generandam eam uarietatē, quæ in rebus ipſis cernitur. Inde fit ut ipſarum proportiones in infinitum

nitum

nitum excreſcant: quas tamen ipſas finiri etiam neceſſe eſt, ob eam ſaltē cauſam, quia finiti quoq; naturam in ipſis exiſtentem continent. Primum enim in arithmeticis, ſi ab unitate cœperis progrediendo, reperies mundos in infinitum augeri: neque unquam excreſcendi finem, ubi quieſcant ipſi, fieri poſſe, ut cum eò perueneris, ceſſandum in illo numerorum auctu tibi prorſus intelligas. Quęcunque porro numerum effeceris, illum omnino finitū eſſe neceſſe eſt. Deinde in ipſis quoque magnitudinibus idem apparet, ut in infinitū diuiſio illarum fieri poſſit. Ipſę uero res ita diuiſę, omnino (& quod dicitur) actu ipſo finitę ſunt: ut cum diuiditur aliquod totū in partes ſuas unde componitur, neceſſe eſt ipſas partes quæ ex diuiſione procedunt, eſſe finitas: nam niſi finitę eſſent, ne partes quidem ipſę eſſe poſſent. Præterea ſi nihil eſſet infinitum, illa duo perabſurde cōſequerentur, & ut magnitudines omnes eſſent cōmenſurabiles, neque in ipſis quicquam incōmenſurabile: ideóque ne irrationale quidem. Hoc autem eſt, quo differunt ea, quæ in geometria pertractantur ab arithmeticis: ſiquidem in illis ſunt quædam irrationalia, de quibus hoc libro: in arithmeticis uero nihil irrationale, aut incommenſurabile cognoſcitur: ſunt enim omnes numeri commenſurabiles inter ſe, ea ſaltem mēſura, quę minima eſt in numeris, nempe unitate. Alterum quod perabſurde ſequeretur, ſi nihil eſſet infinitū

illud eſt, quod ea uis & facultas unitatis, ut ex ſe numerorum ſobolem infinitã procreare queat, non exiſteret: neque uero numeri proportiones omnes intra ſe continerent, quas in rebus ſingulis ineſſe perſpicimus, multiplices dico, ſuperparticulares & reliquas tales. Omnis enim numerus unitati comparatus ad ipſam unitatẽ habet proportionem aliam, quã idem ipſe numerus ad aliũ numerum comparatus. Similiter ſi finitum nihil erit, commenſurabilitas & communio proportionum, ſimilitudo & æqualitas ſpecierũ, cęteráque huiuſmodi quæ melioris cuiuſdam ſunt generis, in rebus diſtinguendis nulla ſint: quæ tamẽ ipſa in mathematicis eſſe conſpicimus. Ea uero ſi non eſſent, ne mathematica quidem ulla ſcientia ſupereſſet, cum nihil certo, conſtanter ſubtilitér ue diceretur, quod cogitatione firma concipi poſſet. Quantum uero utilitatis ea ſcientia communi hominum uitę & ſocietati conferat, id quidẽ non ad uſus ipſius uitę neceſſarios reſpicientẽ æſtimare conuenit: ita enim fieret ut cognitionem omnem & cõtemplationem rerum tanquã inutilem repudiaremus, quippe quæ à rerum humanarum neceſſaria ſuppeditatione ſeſe quàm longiſſime ſoleat abducere, ne earum quidem rerũ ullam omnino cognitionem aut curam appetẽs, quibus uſus uitę neceſſarius cõtineri ſolet. Eſt uero mathematicę ſcientię ſua certa, propriáque dignitas & utilitas, illa quidem per ſe æſtimanda,

neque

neque quicquam externum reſpiciens, quò ſe referat, nullius omnino rei miniſterio ſuam utilitatem accommodãs, neque uitę neceſſitati ſubſeruiens. Quin & liberales diſciplinę à libertate dictę, ſui nominis dignitatem ſuſtinere tuerı́ue nullo modo poſſint, ſi ad ſeruiendum uſibus neceſſariis reuocentur. Quòd ſi ulla ratione illud admittendum uidebitur, ut aliud quippiam extra ſe ſpectare debeat, cuius utilitatem conſectandam ſibi putet, quid eſt in omni rerum uniuerſitate ſplendidius & magis excellens, quàm quod mathematica ſcientia uiam munire ſolet animis noſtris? eámque certiſſimam ad rerum intelligibilium, omni materia ſolutarum cognitionem abſolutã? Et quidem ſi qua eſt utilitas expetẽda, illa eſt profecto, quam ex ſe pręſtantiſſimam & eximiã profert: nam & quaſi manu ducit ad res intelligibiles percipiendas: & quod eſt in Timęo ſcriptũ diuinitus, illius ſciẽtię cognitio uia quædam eſt ad plenam & integram mentis noſtrę inſtitutionẽ: cuius rei ea certe cauſa eſt atque ratio, quòd eadẽ eſt ipſi proportio ad cognitionem totius & primam philoſophiam, quæ eſt inſtitutioni puerili ad uirtutis ipſius ſummam & habitũ. Hæc enim efficit bonis & rectis moribus aſſuefaciendos, ut animus puerilis ad uitam ex uera uirtute perfectam adoleſcat: illa uero animi noſtri partẽ eam quæ διάνοια dicitur ita ſuis commoditatibus inſtruit & cumulat, ut multo paratior ad res exi-

mias inſpiciēdas & cognoſcēdas accedat. Ex quo Socratis ueriſſimū illud mihi uideri ſolet, oculū animę, quem mentē dicimus, ipſum quidē ſtudiis & cupiditatibus obtutúque rerum alienarū excęcatum, & ueluti defoſſum, ſolę ſciētiæ ratione diligentiáque recreatum excitari, & quodam ueluti collyrio perſanatum cōualeſcere ſolere: ita ſane, ut rurſum ad ſpeculationem ipſius entis, ab imaginibúſque perſpectis ad res ipſas, quarum illę fuerāt imagines, erigi: & tanquam ex caliginoſo ſpecu in locū illuſtriſſimū eductus, illud ipſum lumen intelligibile acie conſtanti poſſit intueri: omninóque carcere quodam egreſſus, & rerum generabilium uinculis inconſtantíſque materiæ nodoſa uarietate tandem exolutus, ad incorpoream & impartibilem ſubſtantiam attolli. Nam & pulchritudo & ordinis illius ratio, qui in mathematicis elucet diſciplinis, ipſáque rerum ibidem perſpectarum certa conſtantia, animum noſtrum propius ſiſtunt ad intelligibilia, ipſa quoq; ſemper eodem modo ſe habētia, pulchritudiníq; diuinę conuenientiſſima. Quæ cum ita ſint, mathematica ſcientia eſt & ipſa quidē per ſe & ſuapte ui digniſſima, quæ ſtudioſe colatur: neque tamen non plurimum momenti ad eam uitam affert, quæ mentis unius maxime propria eſt & accommodata. Illud autem in hac re ſatis eſt argumenti ſciētiam eam per ſe ſua ipſius dignitate & æſtimatione niti, ut eſt quodam loco ſcriptum ab

Ariſtotele,

Ariſtotele, quòd qui res illas exquiſiuerunt, nullo prēmio, magna diligentia ſtudióque uehementi illud ſunt aſſequuti, ut paruo temporis interuallo illa permagnum acciperet incremētum, cum ipſi cæteris omnibus poſthabitis huic uni ſtudio ſe totos tradidiſſent: atq; hi maxime, qui diuiniore natura præditi, diuinitatē ſuis factis exprimere, quoad licitum eſſet, elaborauerunt. Itaque uerisſimū illud eſt, ſi qui ſunt, qui contēptui habendum hoc ſtudium exiſtiment, eos ſine guſtu eſſe ſummarum, quæ quidem in homine libero conſtantiq; exiſtere poſſunt, uoluptatū. Quid ergo? nunquid habet ea ſciētia quod contemni debeat, ea re tantum quod nihil adiuuet cōmunis hominum uitę neceſſarias utilitates? Nullo certe modo: nam & extremi illius effectus ubi ſe cum materia coniungere incipiunt, eò maxime tendunt, ut paulo poſt dicturi ſumus. Quin eo maiore digna res eſt admiratione, quòd citra ullius omnino materię contagionem ſuum ipſa finem in eóque fine ſitum bonum perſequatur: & in ſe ipſa conuerſa nihil ſpectet externum: homines enim rerum ad uſum uitę neceſſarium comparandarū occupationibus uacui plane ſolutíq;, ſeſe ad ſciendum ſcientiæque adoptionem contulerunt: neque id tamen non recte, cum prima cura rerum illarum eſſe debeat, quibus natura ipſa ad ſui educationem & tuitionē carere nullo modo poteſt. Huic porro ſi quādo ſatisfactū erit, hoc eſt, ſi na-

naturam ducem conſequuti, cupiditatem haben di rerum neceſſariarum modo naturáque metiri uoluerimus, tũ uero illa nos cogitatio debet excipere, rerum à neceſſitate generationéque remotarum, & uerum ipſum proxime attingentium: quod cum acciderit, unà quoque id quod in anima noſtra inchoatum & rude fuerat, integrũ abſoluitur & perpolitum. Scientię porro mathematicę diuiſioné eam attulerũt ueterum plęriq;, inter quos & Geminus, ut diceręt aliam quidem circa res uerſari ſolò intellectu perçeptiles, aliam uero res ſenſui ſubiectas pertractare. Res autem intelligibiles illas eſſe dixerunt, quarũ intelligentiam ipſe per ſe animus abſque ulla rerum ſenſilium participatione ſeipſum ad contemplationẽ excitans perſequitur: cuius generis duę ſunt pręcipuę potiſſimęq; partes, arithmetica, & geometria: alterũ uero genus quod rebus ſenſilibus addictum illá ſex comprehendit, aſtrologiam, muſicam, ſupputatricem, mechanicã, perſpectiuam, menſuratricem. Nam quod ad inſtruendas pertinet acies, (τακτικὰ uocant) in partibus mathematicę habendum non arbitrãtur, quãuis interdum ipſius auxilliis uti adiuuaríque ſoleat, modo ſupputatricem adhibeas, ut in enumerandis copiis, modo & menſuratricem, id eſt, γεωδαισίαν, ubi diuidenda ſunt caſtrorum metatione campi ſpatia & dimetięda: multo uero minus aut hiſtoriam aut medẽdi artem dixeris partẽ ullam eſſe mathematicę,

maticę,licet utraque ipſius ope interdum adiuuetur.Nam & hiſtorię perſcribendę mathematica theoremata ſolere ſcimus appingi,ubi tractus ſitúſque regionũ, urbium magnitudines, diametros,ambitus colligere uolunt.Ipſi quidem medici quã multa in arte ſua, quàm elucidate tractant fidei mathematicæ cognitionis ſubſidio? Nam quod ad aſtrologiam pertinet, quanta eius in omnem medicinę partẽ manare poſſit utilitas,docent de ea re ſcripti diligenter Hippocratis libri: cęteri quoque omnes,qui modò de tempeſtatum ratione locorúmque ſitu ſibi ſcribendum putauerũt. Eadem quoque ratio erit eius, qui aciebus inſtruẽdis operam accommodat: nam utetur & ipſe mathematicis theorematibus:neq; tamẽ cõtinuo mathematici nomine perhibẽdus,licet aliquando quàm minimos cupiens in ſpeciẽ uideri ſuos exercitus ad circuli figurã conſtituat,caſtrorum ambitum nonnunquam in quadratum pentagonum aut aliam multorum angulorum formam,ubi quàm maximos apparere cupit. Tales autem primę ſpecies cum ſint ipſius mathematicę,geometria rurſus diuiditur in tractatus duos, alterum planorum, alterũ ſolidorum: nam punctorum & linearum propria nulla omnino ars reperiri poteſt, cum nulla figura punctis aut lineis conſtet,quæ non ſimul plana ſit aut ſolida. Nihil enim aliud agit geometria ulla ſui parte,quàm ut plana & ſolida cõſtituat: conſtituta inter ſe com-

paret aut diuidat. Hoc idem efficitur in arithmetica: nam & numeri diuiduntur in lineares, planos & ſolidos, quorum omnium ſingulatim ſua eſt tractatio. Nam & ſpecies numerorũ ipſę per ſe ab unitate prodeuntes explicantur, & generationes planorum, ſimilium, inquam, & diſſimilium, & ſolidorum etiam, qui tertia quadã multiplicatione confici ſolent. Illa autem quam menſuratricem dicimus, item alia quam ſupputatricem ſuperiorum ſimilitudinem nonnullam referentes, ipſę tamen ſunt in eo diſſimiles, quòd non de numeris aut figuris intellectu ſolo comprehenſis inueſtigant, ſed de ſenſilibus: neque enim munus menſuratricis eſſe poſueris, ut cylindrum aut conum metiatur, ſed rerum in materia demerſarum aceruos tanquam conos, puteos autem ut cylindros: ſed neque lineis quibuſdam intelligibilibus id aſſequitur, uerum ſenſilibus, & ut exactiſſime, radiis ſolaribus: ruditer autẽ, per applicationem amuſſis lineæ, aut alterius rei non diſſimilis opera, quæ materia conſtet. Quam uero diximus ſupputatricem, ne ea quidem paſſiones numerorum ipſas per ſe cõſiderat, ſed numeros rebus materialibus inuolutos: & diuidendo quidem nihil ſtatuit eſſe minimum, quomodo neque arithmetica: quod tamẽ ſpectat ad certum genus unum, ponit aliquid quod ſit minimum: unus enim aliquis homo eſt illi pro menſura totius hominum multitudinis, ſicut unitas quoque menſura communis

munis eſt omnium numerorum. Perſpectiua rurſus & muſica ſunt quędam ueluti partes, illa quidem geometrię, hęc autē arithmeticę. Nam perſpectiua uiſu noſtro ceu linea abutitur, & iis angulis qui ex radiis uiſoriis conſtituuntur: diuiditúrque in eam quę proprio nomine dicitur perſpectiua, cauſas explicās eorum, quæ aliter quàm ſint, apparere ſolent, ob ipſorum alios atque alios poſitus & diſtantias: quales ſunt lineæ parallelæ concurrere uiſę: rerū quoque quadratarum figurę circulari formā conſpectę. item in eam quæ in uniuerſum ſpecularis dici poteſt, quæ cuiuſq; generis radios fractos ſiue flexos perſcrutatur, uiſorum ſeu imaginum cognitionem adiunctam habēs, ſimul & illud afferēs quî fieri poſſit, uti quod conſpicitur, amœnum ſit uiſu iucundúmq;, nulla partium ſuarum diſcrepantia aut deprauatione corruptam imaginem propter interuallū aut eleuationem rei uiſę, oculis ſpectātium exhibēs. Muſica uero conſonantium numerorum rationes auribus acceptas cū indagaſſet, canones ſuos & fides ipſas ita ſecandas oſtendit, ut faciles ad cognitionem noſtram illę ſonorum conuenientiæ fierent: cúmque paſſim ad ſenſuum delectationē iudiciúmq; diuerteret ſermonem, Platoni dedit affirmanti eam eſſe, quæ menti aures ipſas prętuliſſe uiſa ſit. Ad illas ſuperiores accedit mechanica, pars & ipſa quędam exiſtēs totius tractationis & cognitionis rerum ſenſilium & materię con-

iunctarum. Huius autem generis illa eſt quæ opera & machinas cuiuſque modi efficit ad uſum totius rei bellicę neceſſarium idoneas: qualia multa diuino uir ingenio Syracuſius Archimedes excogitaſſe ſcribitur & conſtruxiſſe, uim permagnam & incredibilem habentia, ipſis quoque Romanis Syracuſas terra maríque obſidētibus formidabilia: quorum tamen ipſorũ nihil apud Archimedem tanti fuerat, ut magno ſtudio dignum arbitraretur. uerum ſicut Plutarchus in Marcello ſcribit elegantiſſime, γεωμετρίας παιζούσης ἐγεγόνει πάρεργα τὰ πλεῖστα: ea tamen fuerũt unius hominis ludicra, ut Romanorum uires toti pene terrarum orbi formidabiles diutius eluſerint, nec antè urbis potiũdę Marcello imperatori clariſſimo ſpes facta fuerit, quàm ex inſidiis noctu, mœnibus per abſentiam Archimedis indefenſis ſcalas admouerit. Fabuloſa hæc profecto uideri poſſint, ſi ad noſtrorũ hominum ingenia, quæ uſpiam ſunt nobiliſſima, conferantur. Verum tamẽ perinique faceremus, ſi primum aliorum induſtriam ex cæterorũ metiri uellemus ignauia: ut quod hi non poſſint, ne illi quidem potuiſſe uideantur. Deinde qui fieri poſſit, quæ pręſtantiſſimi quique, iidémque grauiſſimi ſcriptores, nõ Græci tantum, qui ſuis ambitioſius fauiſſe uideri poſſint, ſed etiã Latini, iíq; Græcis hominibus ſępius iniqui, M. Tullius, T. Liuius in unius hominis laudibus conſentientes ad cęlum extulerũt, ut his fidem abrogemus? Quòd ſine

ſine authoritate quidem ulla ad credendum adducimur, ſunt in oculis manibúſq; noſtris Archimedis ipſius opera, non illa quidem de machinis ipſis aut operibus conſcripta, nihil enim tale ſcriptione dignũ magnopere indicauit, ſed quæ longe maiora diuinioráque cenſenda ſint, rerum illarum uniuerſalia theoremata, quę ſi quis uia ordinéque aggreſſus erit, cum iiſdem ueſtigiis inſtiterit, quibus Archimedes & ueteres illi nobiléſq; geometrę, eodem quoque peruenturum ſeſe confidat. Nobis quidem ſi uita ſuppetet, illud in primis curę futurum eſt, quòd adhuc fuit in hoc decimo Euclidis libro, ut difficillimi quique priſcorum geometrarum libri certa ſpe & fiducia intelligẽdi legi poſſint ab iis, qui modo ſtudiorũ ſuorum rationem ad ueterum normam exigere, ordinémque certiſſimum diſcendi magiſtrum conſeruare uolét. Ordinem autem ipſum ſi quis obſeruauerit, nihil pręterea putet eſſe, quod ſibi deeſſe poſſit. Sed iam ad inſtitutũ ut reuertamur, ad eas artes quas ante memorauimus accedit & illa, quę rebus ex ſeſe immobilibus motum attribuit, nũc per quaſdam aſperationes, quemadmodum perſecuti ſunt Cteſibius & Heron: nũc per librationes ponderúmque momenta, quorum inæqualitas mouendi cauſam affert, æqualitas uero quietis neceſſitatẽ, ut eſt in Timęo, nunc quibuſdã neruis & funiculis attractus & motiones animatorum corporum imitantibus. Eſt & alia ge-

neris eiuſdem, quæ ſphæris conſtruendis operam adhibẽs, circuitus orbium cæleſtium imitatione conſequitur: qualem idem ille nunquã ſatis laudatus Archimedes effinxit. Aſtrologia ſupereſt: diſputationem inſtituens de mundi ipſius cõuerſione mirabili, de magnitudine, figura, ſitu, celeritate, tarditate corporum cęleſtium: quæ uis ſit in illis illuminãdi, qui diſceſſus à terra, qui ad eandem acceſſus: & quæ ſunt his cõſequentia, ex ſenſu quidem & ipſa permultum inſtructa, nihilo tamen minus cognitioni rerum naturalium familiariter communicans. Cuius illa pars contemnẽda non eſt, quę ex normarum & umbilicorum ſitu, horarum ſpatia & tempeſtatum interualla dimetitur: quęq; ſublimia ueſtigando poli cęleſtis altitudines in quaque terrarum parte, aſtrorúmque diſſitas poſitiones comprehendit, plęraq; ſimul alia perſequens, quæ ſunt aſtrologo ſpeculanti propoſita. Eſt & illa quæ dioptrica dicitur per rimulas in ſole, luna cęteríſq; ſyderibus celeritates tarditatéſque motuũ uenari ſolita. Eę quidem ſunt partes ſcientię mathematicę, ita deſcriptę à ueteribus mathematicis, quemadmodũ explicuimus. Nunc autem de fine ad quem feratur intendátque, cum hæc tota tractatio elementorum geometricorum, tum ea de lineis rationalibus & irrationalibus, quæ eſt huius decimi libri propria, pauca quædam afferamus. Qua in re illud ſane cum primis eſt intelligendum, propoſitũ

duplex

duplex Euclidi fuiſſe in his quidem libris, aliud quod traditionem rerum perquiſitarum reſpiceret, aliud pręterea quod diſcẽtis animum omnibus modis informaret & erudiret: ut ſi res ipſę inueſtigationi ſubiectę conſiderandę ſint, dicẽdũ profecto uideatur toto hoc de geometria ſermone nihil aliud quęri, quàm ut nobiles illę figuræ quinque plane comprehenſione intelligantur, à quibus mundus hic uniuerſus, iudicio quidẽ Platonis, deſcriptas ſuas habet partes. Itaq; primum cœpit agi de ſimpliciſſimis quibúſque rebus: deinde ſenſim aſſurgente compoſitionis ſtructura, eò tandem peruentum eſt, ut uarietas omnis illarum figurarum aperiretur, & ſeparatim quidem unaquęque prius conſtituta, tum denique ſimul omnes eodem globo contentę inuoluerẽtur, expoſitis etiam proportionibus, quas lineis lateralibus cuiuſque figurę inter ſe, quáſque ſuperficiebus ipſis, & quas ſolidis etiam figuris inter ipſas ineſſe compertum eſt. Quod autem ad illud propoſitum attinet, erudiendi eius qui ad hoc ſtudiũ diſcendum acceſſerit, huiuſmodi eſt, ut ſecundũ Elementorum geometricorũ intelligẽtiam perfecte cumuletur animus, abſoluatúrq; ipſius habitus & compleatur: quo facile poſſit ad quálibet geometrię tractationẽ comprehendẽdam ipſe ſibi ſufficere. Ab his enim uelut initiis auſpicati, cęterarũ quoq; permultarũ uel potius omniũ huius ſcientiæ partiũ poterimus cognitionem aſſequi,

eiuſdémq; multiplicem animo complecti uarietatem: neque id tantum, quin & illud quoq; uerißime dici poteſt, ſine iiſdem ipſis reliquorum omnium non obſcuram ſolum, uerum neque omnino poßibilem eſſe intelligentiã. Nam & prima quęque atq; ſimplicißima theoremata proxime etiam ad primas hypotheſes accedentia, ſunt his libris ita coagmentata, ut interim nullum ordinem magis cuiq; rei conuenientem afferri potuiſſe cognoſcamus: ex quibus cæterarũ partium ſcriptores ad propoſitũ ſuũ accõmodate, certißimis & incõuulſis uſi ſunt ſuarũ demonſtrationũ fundamentis. Quo in genere eſt Archimedes, Apollonius Pergęus, & cęteri omnes nõ geometræ tantũ, ſed & aſtrologi, & qui mathematicorũ nomine cenſeri ſolent. hoc autem cũ alibi ſemper, tum uero in legendis Conicis Apollonij certisſimũ eſſe nuper ipſi uidimus: ad quæ niſi diligenter inſtructus ab Euclide ueneris, operã plane tibi periiſſe ſenties. Eſt enim Euclidis geometria non ad eorum tantũ cognitionem, quę ſunt de eodem genere ſcripta, neceſſario perdiſcenda, ſed etiam in quauis mathematicarũ ſcientiarũ nihil cuiquã ſatis poterit eſſe notum, qui nõ à geometria profectus peruenerit ad cętera: quam ſi quis ſecundũ Philonẽ eſſe dixerit principiũ & tanquã μητρόπολιν reliquarum omnium mathematicarum, is profecto à rei totius ueritate non aberrauerit. Nam ex illa matrice ueluti quadam urbe populoſa deductæ

ctę ſunt illę deinceps colonię, quę ſunt à nobis ſuperius explicatę. Eſt ergo finis ille geometricorũ: elementorum abſolutus diſcentis habitus, ſcientię uniuerſę capax, traditióque mundanarum figurarum, quæ ſint cuiúſq; proprię fabricationes & inter ſe cõuenientię. Id uero de quo cõſcriptus eſt hic decimus liber, de commenſurabilitate dico & incommenſurabilitate, rationalitate & irrationalitate linearum, eò pertinet, ut cùm extremum totius operis futurum illud eſſet exponere, figurarum de quibus antea dictum eſt, dimenſus, ea præfari oportere uiſa ſunt, ſine quibus illud percipi nullo modo poſſet. In primis neceſſarium fuit, quoniã illę figuræ æqualibus ſuperficiebus, lateribus item & angulis æquis comprehendendæ erant, & eodem globo ita coercendę, ut quilibet angulus ſolidus cuiuſque figuræ intimam faciem pertingeret, oſtendere quãto diameter globi longior eſſet unoquoque cuiuſque figuræ latere. Cúmque uidiſſet Euclides in pyramide, octaedro & cubo talem eſſe habitudinem ipſorũ laterum ad globi diametrũ, quàm rationalem eſſe poſuerat, ut eſſent ipſa inter ſeſe comparata longitudine quidem incommenſurabilia, ſed potentia tamen commenſurabilia, ideóque rationalia: in eicoſaedro uero & dodecaedro nõ ſolum eſſe inter ipſa latera longitudinis incommenſurabilitatem, ſed & potentię quoque, ob eámque cauſam illa eſſe ſimpliciter irrationalia certę cuiuſdã

ſpeciei. Ea rationę priuſquã ad illa demonſtranda aggrederetur, intellexit omnino ſibi faciendũ eſſe, ut de linearum rationalitate irrationalitatéque tractatũ inſtitueręt, quótque & quales eſſent ſpecies irrationalium linearum: ut non appellationibus tantũ diſcretis notari poſſent, ſed quod multo certius eſt, ad quãque rem cognoſcẽdam, quid cuique ſpeciei ſingulatim neceſſarióque cõ ueniret, perſpicuum fieret. Proinde tractatum illum abſolui non poſſe ſine cognitione numerorũ cum facile intelligeret, ideo de ui numerorũ quãtum ſatis uiſum eſt ad ſermonem ſuſceptum tribus eſt libris diligentiſſime commẽtatus. Neque enim ferendus eſt neſcio quorum hominũ error, affirmantium proportiones linearum irrationalium eſſe non nobis tantum, ſed & naturæ ignotas: ob ídque potiſſimum, quòd illę tales proportiones nõ extent in numeris. Quod ſi ita eſſet, primùm quàm inanis uideri deberet conatus Euclidis, operam in re per ſe inexplicabili abutentis? tum autem adeo ſunt illuſtres hoc libro notæ, támque proprij cuiuſq; ueluti mores expreſſi, ut quod Euclides conari uiſus eſt, illud abunde perfectéque pręſtitiſſe intelligatur. Nobiliſſimũ itaque totius geometrię locum à Pythagora philoſopho pręſtantiſsimo ante patefactum ita perpoliuit excoluítque, ut deſiderio nihil reliquerit. Hæc habui Bellai ampliſsime, quę nõ quidem dicere poſſem, finem enim nullũ habitura eſſet oratio,

tio,ſed quæ cum dixiſſem,exiſtimaui iuuentutis partem aliquam excitatum iri,ut cuperet imitatione ſtudiorum,ueterum philoſophorum nominis gloriam æmulari: cuius pręclariſsimę contentionis in animis hominum excitãdę facultatem uiris conceſſam eſſe principibus,eámque ampliſſimam cum intelligeret Franciſcus Rex huius noſtri pater omnium bonarum artium fideliſsimus tutor,patronus atq; propugnator acerrimus, iuuit ille quidem mirifice ſtudia literarum: uerum minus profecto quàm uoluit,magis autem multo,quàm licitum illi fuit per quorundam auerſas à laudabiliſsimo ſtudio rationes atque uolũtates. Illius tu Regis alumnus,illius tu beneficentia ad ſummos fortunę dignitatíſque gradus,doctrinæ commendatione ſublatus,recte conſtantérque feceris,ſi quod per te nauiter facis, patrociniũ philoſophię ãtea quidem à Rege liberaliſsimo ſuſceptum,ita retinere pergas,ut Margareta Regis filia, iudiciíque paterni,atque animi in bonarũ artium ſtudiis,bonorúmque omnium tuitione obſeruantiſsima atque æmula,bene collocatum in te ornando patris beneficium prædicare poſsit. Permultos autem eſſe multis in locis cum acceperim,quorum in philoſophię literis ſtudia,tuis paratiſsimis opibus alantur & ſuſtententur: hæc autem una mathematica cognitio,cuius tantæ ſunt in omni philoſophię parte commoditates, deſerta plane deſtitutáq; reliquorum hominum præ-

ſidiis paſsim iaceat atq; ignoretur, tuę certę partes illę ſunt, ut huic quoq; ſtudio pro tua humanitate per te conſultum uelis: ex iſtóque præclaro tuorum grege, de quo paulò ante dixi, certos eligas ingenio acres, quibus id muneris omnium iucundiſſimi atque fructuoſiſſimi committas, ut totam rem mathematicam diligenter amplexi penitúſque perſcrutati, poſſint cæteros exemplo doctrináque ad ſui æmulationem permouere. Vale. Lutetia Calend. Iulij. 1551.

EVCLIDIS ELEMENTORVM LIBER DECIMVS.

Petro Montaureo interprete.

COMMENSVRABILES magnitudines dicuntur illæ, quas eadem menſura metitur.

PROPOSITVM *nobis illud eſt hunc decimũ elemẽtorum librum (cuius intelligentiam plerique difficillimam ſuſpicantur, neq; uerò poſsibilem abſque auxilio eius partis arithmeticæ, quam multorum ſcriptis illuſtratã* Algebram *uocant) ſine omnino ullis numeris irrationalibus dictis oſtendere, nõ ſolùm non difficillimũ, ſed etiam facillimum eſſe, ſi quis attentum animum & inſtructum ſcientia librorum ſuperiorum* Euclidis *afferat: neque porrò cuiuſquam externæ ſcientiæ, nedum algebræ demonſtrationibus indigere: ſed ex ſuis ipſius* Euclidis *tãtum demonſtrationibus, & familiariſsimo ipſi ordine dependere.* Vt *autem clarius intelligatur hæc definitio, prius explanãdum puto, ſi quid in ea ſubobſcurum contineri uideatur. ſic enim præcipiunt dialectici. Cum itaque dicitur aliqua menſura magnitudinẽ aliam metiri: illud intelligitur primùm, ut ea menſura ſit minor illa quam metitur, aut ei ſaltem æqualis. maior enim nullo modo metiri minorem poteſt. Deinde ut ea menſura ſemel ſumpta ſi æqualis erit, aut ſi minor fuerit pluribus uicibus repetita: eam magnitudinem quam metitur, præciſe referat, id quod ex numeris*

ſidiis paſsim iaceat atq; ignoretur, tuę certę partes illę ſunt, ut huic quoq; ſtudio pro tua humanitate per te conſultum uelis: ex iſtóque præclaro tuorum grege, de quo paulò ante dixi, certos eligas ingenio acres, quibus id muneris omnium iucundiſſimi atque fructuoſiſſimi committas, ut totam rem mathematicam diligenter amplexi penitúſque perſcrutati, poſſint cæteros exemplo doctrináque ad ſui æmulationem permouere.

Vale. Lutetia Calend. Iulij. 1551.

EVCLIDIS ELEMENTORVM LIBER DECIMVS.

Petro Montaureo interprete.

COMMENSVRABILES magnitudines dicuntur illæ, quas eadem menſura metitur.

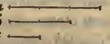
PROPOSITVM *nobis illud eſt hunc decimũ elemẽtorum librum (cuius intelligentiam plerique difficillimam ſuſpicantur, neq; uerò poßibilem abſque auxilio eius partis arithmeticæ, quam multorum ſcriptis illuſtratã Algebram uocant) ſine omnino ullis numeris irrationalibus dictis oſtendere, nõ ſolùm non difficillimũ, ſed etiam facillimum eſſe, ſi quis attentum animum & inſtructum ſcientia librorum ſuperiorum* Euclidis *afferat: neque porrò cuiuſquam externæ ſcientiæ, nedum algebræ demonſtrationibus indigere: ſed ex ſuis ipſius* Euclidis *tãtum demonſtrationibus, & familiariſsimo ipſi ordine dependere.* Vt *autem clarius intelligatur hæc definitio, prius explanãdum puto, ſi quid in ea ſubobſcurum contineri uideatur. ſic enim præcipiunt dialectici.* Cum *itaque dicitur aliqua menſura magnitudinẽ aliam metiri: illud intelligitur primùm, ut ea menſura ſit minor illa quam metitur, aut ei ſaltem æqualis. maior enim nullo modo metiri minorem poteſt.* De*inde ut ea menſura ſemel ſumpta ſi æqualis erit, aut ſi minor fuerit pluribus uicibus repetita: eam magnitudinem quam metitur, præciſe referat, id quod ex numeris*

deprehendi facillime poteſt. Quãuis enim Euclides hac definitione comprahendat magnitudines tantùm quas quantitates continuas appellant, quales ſunt lineæ, ſuperficies, & corpora: tamen arbitror non inepte requirendam eſſe explicationem huius loci à numeris: quum præſertim magnitudines commenſurabiles eam habeãt proportionem inter ſe, quam numerus ad numerum.

Campanus uir ex geometriæ ſtudijs laudem nõ immeritò conſequutus, illud principium recte inſerit cæteris libri ſeptimi principijs, cum græcum exemplar nihil tale habeat. Numerus aliũ numerare dicitur, qui ſecundum aliquem multiplicatus, illum producit. cuius rei hoc ſit exemplum. Ternarius numerat ternariũ per unitatẽ multiplicatus. idem ternarius numerat ſenarium per binarium multiplicatus: numerat nouenarium per ternarium multiplicatus: numerat 12 per 4: numerat quoq; cæteros infinitos. Ille ipſe tamen ternarius alios numeros ſuperioribus interpoſitos minime numerat. Nam neq; unitatem ipſam, aut binarium numerat. Maior enim minorem nullo modo numerare poteſt: ſicut in magnitudinibus (ut antè diximus) maior menſura minorem ſeipſa magnitudinem non metitur. Neque uerò ternarius numerat 4 aut 5. per unitatem enim multiplicatus nihil amplius efficit quàm 3. binario uerò multiplicatus, excedit & 4 & 5. multo magis ſi alio ternario aut maiore aliquo numero multiplicatus fuerit, eoſdem 4 & 5 excesſerit. Eadẽ ratio eſt ſeptenarij, octonarij, denarij & undenarij, ſi unum ex his quemlibet coneris per ternariũ numerare. Si quis

autem

autem erit qui me res nimiũ minutas perſequi repræhendat: conſilium noſtrum illud eſſe ſciat, ut librũ hũc, non tam natura ſua difficilẽ, quàm ignoratione principiorum, ad intelligendum facillimum reddam his qui amœniſſimum hunc geometriæ locũ perluſtrare uolent. Et certè in maximos errores pleroſq; imprudentiæ ſuæ uitio & principiorum parua ſiue dicas praua intelligentia turpiter incidiſſe, neminem dubitaturum arbitror, qui modò noſtra legens, ipſarum rerum intelligentiam aſſequutus erit. De his autem hactenus, nos in uiã redeamus. Dicimus hanc definitionem magnitudinũ commenſurabilium, ſiue malis principium nominare, per analogiam quandam ex illo Campani loco plane intelligi. Nam quod dicitur in numeris alios numeros numerantibus: idem aut ſimile quiddam intelligas in magnitudinibus, quarum alteram dicimus per alterã menſurari. Quod ut planius intelligatur, ſumamus exẽplum in una ſpecie magnitudinis. Sint duæ lineæ ã & b. quæ ſi fuerint cõmenſurabiles, erit quoque communis utrique aliqua menſura quæ ſit c. Nam illa linea c bis repetita, refert præciſe lineam b. ter uerò repetita, lineam ã, & ipſa quoque præciſe refert.



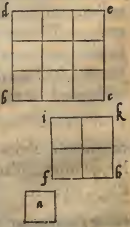
Incommenſurabiles verò magnitudines dicuntur hæ, quarum nullam menſuram communẽ contingit reperiri.

Hic locus pluribus uerbis non uidetur indigere, quàm ut

moneamus ex ſuperius dictis intelligendū eſſe. Contraria enim ex contrarijs intelligi poſſe receptum eſt. Porrò accidentia & paſsiones his congruentes ex ipſo Euclide repeti debere ſequentium rerum lectio docebit.

Lineæ rectæ potentiâ commenſurabiles ſunt: quarum quadrata una eadem ſuperficies ſiue area metitur.

Quantum ad hunc locum attinet, duo quædam præſcribenda puto. Primum, ut intelligamus per hāc uocem, lineæ potentia, quadratū illius. tantum enim dicitur linea poſſe, quantum quadratum deſcribere poteſt. Alterum, ut tali diſtinctione hîc utamur. Linearum hæ quidem ſunt longitudine inter ſe commenſurabiles: illæ uerò potentiâ inter ſe commenſurabiles. Alterum membrum linearum longitudine commenſurabiliū non explicat Euclides, quia uiſus erat illud comprehēdiſſe antea uniuerſali definitione magnitudinum commenſurabiliū. Nam lineæ ſunt ſub genere magnitudinis. Sed quia lineæ habent illud quoque in ſe propriū & peculiare, præter cæteras magnitudines, ut quædam ex his ſint potentiâ cō menſurabiles: hoc uerò ſibi nō exiſtimauit prætermittendum.



Sit *linea b c. eius quadratū ſit b c d e. ſit etiā linea f h. eius quadratū ſit f h i k. hæc duo quadrata me-*

tiatur una quæpiã ſuperficies, uerbi gratia ſuperficies ã, quæ metiatur primò quadratum b c d e, nouies repetita, qui eſt numerus areolarum in eodẽ quadrato deſcriptarum. Præterea metiatur quadratũ f h i k, *quater repetita, ſecundum numerum ſuarum areolarum. Erit itaque ſuperficies ã, illa, quæ metitur ea quadrata duo.* Horum *ergo, quadratorũ inquam, b c d e, f h i* k, *latera ſiue lineæ potentes illa quadrata, quæ ſunt lineæ b c, f h, erunt potentiâ commenſurabiles.*

Incommenſurabiles verò lineæ ſunt, quarum quadrata, quę metiatur area communis, reperiri nulla poteſt.

Hoc loco nihil aliud dico, quàm ut adiuues intelligentiam huius loci additione uocis, potentia, quæ ſuperiori definitioni additur, ut intelligas de lineis illis quæ ſunt incommenſurabiles potentiâ. quæ cum ſint potentiâ incõmenſurabiles: illud quoque habent, ut ſint præterea longitudine incommenſurabiles. hactenus dictũ ſit. Quòd ſi plura hoc quidem loco ſcire deſideres: peruertes ordinem diſciplinæ, qui certiſsimus eſt ad diſcẽdũ magiſter.

Hæc cum ita ſint, oſtendi poteſt, quòd quãtacunq; linea recta nobis proponatur: exiſtunt etiam alię lineæ innumerabiles eidem cõmenſurabiles: alię item incommenſurabiles. hæ quidẽ longitudine & potentia: illæ verò potentia tantùm.

Huius libri præcipuum illud eſſe uelim ſcias, quod non, ut cæterorum ſuperiorum, in prima lectione percipi poſsit

eius doctrina, ſed iterata & ſæpius repetita: eóque fit ut plæraque principia hic ſcripta, non quidem demonſtrentur ex ſequentibus: ſed melius intelligantur, ſi cum ad ſequentia ueneris, ad principia ſubinde redeas. Vſus enim harum uocum, qui eſt in ipſis theorematibus, res illis uocibus expreſſas faciliores intellectu reddit. Sic itaque faciendum puto hoc quidem loco. Nam ſequentes propoſitiones magnam illi lucem afferent. Tantum enitere ut concipias animo res nudas, quarum ſignificatio his uocibus ſimplicibus continetur: in quo te iuuabunt ea quæ ſuperius à nobis ſcripta ſunt. Vocetur igitur linea recta, quantacũque proponatur ῥητὴ, id eſt rationalis. Quam lineam uocari uult ῥητὴν, eam interpretes Latini nominauerunt rationalẽ. qua ratione ducti, neſcio: mihi quidẽ non ualde probatur. Sit ergo ῥητὴ linea recta quæcunque, de qua ſermo inſtitui debeat. Etymologiæ rationem in enuntiatione rerũ uocibus ſimplicibus ſignificandarum, ſicut uiſi ſunt ueteres magna diligentia conſequuti: ita nobis non contemnendã exiſtimo, ut rerum ipſarum cognitionem adiuuemus. huius uocis ῥητὴ ratio ducta mihi uideri ſolet ἀπὸ τοῦ ἐρῆσθαι unde τὰ ῥητὰ καὶ ἄρρητα. ῥητὸν illud interpretor quod eſt effabile, certum, conceſſum, & determinatum: ac ſi, uerbi cauſa, dicas id eſſe, quod eſt dicibile, & uoce ſignificari poſſit. ῥητὴ itaq; erit quæcunque linea, quantacunque magnitudine proponatur. Ideo ῥητὴ nominata, quia datam lineã poſſumus diuidere in quàm multas partes uoluerimus. Scitum eſt enim ex nona propoſitione ſexti libri, A data linea iuſſam partẽ auferre.

ferre. Quod quum ita ſit, propoſita linea diuiſiones eas admittit, quas animo conceperis: ut dicas, hæc linea quæ proponitur, tot partes habet, tres puta, quatuor aut quinque, quas aut pedes aut paſſus, aut aliud quoduis menſuræ genus eſſe contigerit, ut tres pedes aut paſſus quatuor longa ſit. hæc autem linea, quam ῥητὴν uoco, omnibus penè propoſitionibus huius libri, & eis maximè quæ à decima incipiunt, fundamenta præſtat: ut niſi hanc primo loco poſueris, & animo conceperis antequam demonſtrationem cuiuſque theorematis attingas, nullum facile intelligas. Eſt enim uelut norma omnium linearum ex qua ipſarum quoque menſura peti debet an ſint rationales necne. Nam hæc ipſa ῥητὴ quæ hic denominatur, eſt ῥητὴ ex ſuppoſitione quod quidem hæc uox προτεθεῖσα facile indicat, quaſi dixerit ὑποτεθεῖσα, quæ uelut ῥητὴ id eſt rationalis primo loco dici poteſt, ut ipſa uoce differat à cæteris lineis rationalibus, de quibus mox agit. Cuius rei te perpetuò meminiſſe uelim.

Lineæ quoque illi ῥητῇ commenſurabiles, ſiue longitudine & potentia, ſiue potentia tantũ, vocentur & ipſæ ῥηταὶ id eſt rationales.

Hic locus plane intelligitur ex duabus definitionibus ſupradictis, nempe magnitudinum commenſurabilium, & linearum potentia commenſurabilium. Obiter tamen aduertas in his uerbis, commenſurabiles ſiue longitudine & potentia, ſiue potentia tantùm, quantã cautionem adhibuit Euclides, *ut uocibus ipſis coniungeret*

res eas quæ natura ſua coniunguntur, ſeiungeretq; contrarias. quod religioſiſſime mathematici penè omnes uiſi ſunt obſeruare: ut in hoc loco, quia lineæ longitudine commenſurabiles, ſunt & ipſæ quoque potentia commenſurabiles, quum de commenſurabilibus longitudine loqueretur, addere uoluit, & potentia. cum uerò de potentia cõmenſurabilibus, appoſuit, tantùm. Quæ enim lineæ ſunt potentiâ commenſurabiles, non cõtinuò ſunt & longitudine. Hæ uerò ῥηταὶ id eſt rationales, quæ hoc loco talem denominationem acceperunt, iam non ſunt ῥηταὶ ex ſuppoſitione, id quod erat illa prior ῥητὴ: ſed ſunt tales propter relationem quam habent ad illam. Quia ſunt aut longitudine ſimulq; potentia, aut potentia tantùm, ipſi ῥητῇ quæ primo loco ita dicitur, commenſurabiles. Præterea hîc eſt animaduertendum, uoces illas, longitudine & potentia, aut potentia tantùm, coniungi cum illis uocibus commenſurabiles, aut incommenſurabiles: illis uerò uocibus, rationales, aut irrationales, nunquam adponi, ut dicantur longitudine ſiue potentia rationales aut irrationales lineæ. quod Campanus uidetur promiſcue uſurpaſſe. Si plura cupis, auidum diſcendi animũ hîc retineto, ne ueſtigia authoris, eiuſdemq; ducis tui deſeras, qui principia quidẽ ſimpliciſſime tradenda ſibi putauit, ut diſcentium animos nuda rei notione tantùm informaret. quod & uerius eſt, & ad docendum magis appoſitum.

Quæ verò lineæ ſunt incommenſurabiles, illi τῇ ῥητῇ id eſt primo loco rationali, vocentur ἄλογοι id eſt irrationales.

Illud

Illud intellige de lineis longitudine & potentia incommēſurabilibus. Nam incommenſurabiles potētia tantùm, ut eædem non ſint longitudine etiam incommenſurabiles, eſſe nullæ poſſunt. neque hic exiſtimes Euclidem agere de lineis longitudine tantùm incommenſurabilibus, potentia uerò commenſurabilibus. has enim nuper poſuit inter ῥητὰς id eſt rationales. Vult autem hic lineas omni ratione incōmenſurabiles, id eſt potentia & longitudine uocari ἀλόγους. Quod cum non ita perceptum eſſet à Campano, uidetur homini cauſam erroris attuliſſe, quam ipſe poſteris quoque tradidit, ut mox dicemus. Quid ſit ῥητὴ, & ῥητὸν, antè dictum eſt. Quod uerò ad hanc uocem ἄλογοι pertinet, ex commētarijs Procli ſcire licet, ῥητὸν καὶ ἄῤῥητον opponi per priuationem, ut ἄῤῥητον ſit contrarium τῷ ῥητῷ: ἄλογον autem ſæpius uſurpari pro hac uoce ἄῤῥητον, cum tamē idem ſit ἄλογοι & ἄῤῥητον. hoc ἀπὸ τοῦ εἰρῆσθαι, illud ἀπὸ τοῦ λέγεσθαι, quæ idē ſignificant. Itaque ἄλογος linea erit cuius proportio ſiue longitudo comparata ad longitudinem τῆς ῥητῆς id eſt ipſius lineæ primo loco, & ex ſuppoſitione rationalis, nullis numeris referri poteſt. Neq; putes ἄλογοι dici per priuationem τοῦ λόγου id eſt proportionis. Eſt enim ſua proportio linearum alogarum inter ſe non quidem nobis planè incognita, nedum ut naturæ cognitionē effugiāt: quod quidā uolunt, alioqui fruſtrà ſumpſiſſet eam operam Euclides hoc quidē in libro in quo nihil aliud agit, quàm ut doceat paſſiones illarum linearum, & proportiones quas illæ lineæ ἄλογοι inter ſe retinent. Verū ea ratione dicuntur ἄλογοι, quia numeris earum proportio

reddi non poteſt. Nam quod iſti uocant irrationale, cur ita uocent, non intelligo. Surdas autem lineas dici, quas hîc ἀλόγους *uocat* Euclides, *non omnino diſciplicet: quãuis mathematici nõ facile huiuſmodi tranſlationes admittant, ſed quia propriam huius rei uocẽ deeſſe agnoſcimus, ferri poteſt hæc tranſlatio. Neque tamen hoc loco prætermittendũ puto, quod* Nicolaus Tartalea *geometra apud* Venetos, *& libris eruditis nobis quoq; non incognitus, animaduertit* Campanum *& reliquos ab eo geometras falſo exiſtimauiſſe radices ſiue lineas quæ quadrata producunt, illa quidem numero ſignificabilia, ſed non quadrato numero, ueluti* 10, 11, 12, *& ſimilibus, eas inquam lineas* ἀλόγους *eſſe id eſt, ut eorum uerbo utar, ſurdas: hoc uerò pugnare contra hypotheſes* Euclidis, *qui uoluit eas uocari* ῥητὰς *id eſt rationales, quæ ſunt ad lineam propoſitam commenſurabiles, ſiue longitudine & potentia, ſiue potentia tantùm: ex quo magnas opinionum differentias in pleriſque huius libri locis extitiſſe. hactenus* Tartalea. *Neque ſanè hoc nihil eſt, neque tamen in eo ſunt omnia. Ego uerò illud affirmare non dubitem, hinc cæpiſſe noctis illius initiũ, quæ tam denſas tenebras offuderit ueritati rerum his libris traditarum, quæ docentes & diſcentes pleroſq; omnes diuerſos egerint: ut quum ulterius progrederẽtur, nihil amplius intelligerent, quàm ſe nihil intelligere. noſtrum quidem de ea re iudicium cum opus fuerit, afferemus.*

Et quadratum quod à linea propoſita deſcribitur, quam ῥητὴν uocari uoluimus, uocetur ῥητόν.

Non uideo quid planius dici poſſit.

Et

Et quæ ſunt huic commenſurabilia, uocentur ῥητὰ.

Hanc uocem commẽſurabilia, intelligas ſiue ſint quadrata, ſiue alia quæcunque figuræ rectilineæ. Scitum eſt enim cuicunque parallelogrammo, æquale quadratum deſcribere: per ultimum theorema libri ſecundi, ſiue per inuentionem lineæ mediæ proportionalis ſecundum 13 theorema libri 6. quam ubi repereris, colliges ſtatim per 17.6. parallelogrammum rectangulum cõpræhenſum ex duabus lineis extremis eſſe æquale quadrato lineæ mediæ. Simili ratione rurſus cuicunq; quadrato parallelogrammum æquale deſcribitur, per inuentionem tertiæ lineæ proportionalis ſecũdum theorema 11.6. hîc uides nihil tale dici de quadratis & cæteris figuris, quale de lineis antea, quarum eſt & longitudo & potentia commenſurabilis. Figurarum enim ſola conſideratur capacitas, quam longitudo latitudini iuncta determinat.

Quæ uerò ſunt illi quadrato, ῥητῷ ſcilicet, incommẽſurabilia uocentur ἄλογα id eſt ſurda.

Incommenſurabilia hîc quoq; accipias, quales quales fuerint figuræ rectilineæ.

Et lineæ quæ illa incommenſurabilia deſcribunt, uocentur ἄλογοι. Et quidem ſi illa incommenſurabilia fuerint quadrata, ipſa eorum latera uocabuntur ἄλογοι lineæ. quod ſi quadrata quidem nõ fuerint, uerùm aliæ quæpiam ſuperficies ſiue figuræ rectilineæ, tunc uerò lineæ illæ quæ deſcri-

bunt quadrata æqualia figuris rectilineis, vocentur ἄλογοι.

Vnum eſt quod hoc loco animaduertendum putem. Cum dixiſſet ἄλογα eſſe quæ ſunt incommenſurabilia τῷ ῥητῷ, ſubiungere uoluit de lineis illa incommenſurabilia deſcribentibus, & eas uocauit ſimiliter ἀλόγους: cum tamē antea loqueretur de commenſurabilibus ipſi ῥητῷ, nihil egit de lineis illa commenſurabilia deſcribentibus. hoc autem ea ratione prætermiſit, quia ſatis ſibi feciſſe uidebatur, & de his innuiſſe, cum loqueretur de lineis τῇ ῥητῇ cōmenſurabilibus, ſub illis uerbis, ſiue potētia tantùm. Nam potentia lineæ eſt ipſius quadratum, ut antè diximus. Quod ſi quadratum commenſurabile fuerit ipſi ῥητῷ, ipſa quoque linea quæ illud quadratum poteſt, commenſurabilis erit ſaltem potentia. Itaque per diffinitionem linearum commenſurabilium ῥητὴ etiam erit. Extat libellus nomine Ariſtotelis περὶ ἀτόμων γραμμῶν, quem quidem non eſſe Ariſtotelis ex multis locis ipſius facilè intelligitur: eruditio tamen facit, ut attribui debeat alicui ex nobili illa Peripateticorum & docta familia. in eo multa leges intelligentiæ horum principiorum conducentia. Quorum illud unū annotabimus, quod ferè ſummam totius rei declarationem continere uideri poſſit. Commenſurabilitatem & incommenſurabilitatem magnitudinum inter ſe, natura quidem ipſarum magnitudinum conſtare. Rationalitatem uerò & irrationalitatem poſitione fieri, quia quæ primo loco linea ſic dicitur, nempe rationalis poſitione talis efficitur. Aliæ uerò lineæ ad illā relatæ, ſunt aut rationales,

les, aut irrationales, quatenus ſunt eidem commēſurabiles aut eidem incommēſurabiles. R*urſus linea rationalis quæ talis eſt, quia cōmenſurabilis eſt lineæ illi primo rationali, & ipſa relata ſiue comparata alteri lineæ, quæ item proponatur primo loco rationalis eſſe, ſi eidem fuerit incommenſurabilis, dicetur etiam irrationalis.* I*taque eadem linea alteri atque alteri commenſurabilis & incommenſurabilis, erit ſimiliter rationalis & irrationalis.* H*oc autem ideò fit, quia rationalitas, & irrationalitas omnis pendet ex poſitione, non autem ex natura ipſarum magnitudinum. quod tamen in commenſurabilitate & incommenſurabilitate aliter eſt.* S*unt & communes quædam animi conceptiones, quas hîc omiſit* E*uclides, tum quia ſunt infinitæ, tum uerò quia ſunt eiuſmodi, ut eas unuſquiſque poſsit animo modica quadam animaduerſione ſubijcere, ut locus ipſe poſtulare uidebitur: ex quibus tamen illas non prætermittemus, quæ ſingulis locis conuenientes erunt, quales reperiuntur in demonſtrationibus primi & ſecundi theorematum.*

C*ampanus principijs huius libri illud quoq; inſerit,* Q*uamlibet quantitatem toties poſſe multiplicari, ut quamlibet eiuſdem generis quantitatem excedat. quod quidem rectè fecit. nam huius principij auxilio ſtatim utitur demonſtratio primi theorematis huius libri.* D*e illa autem magnitudine hic dicit, quam geometræ & cæteri mathematici tractant, ut augeri poſsit in infinitum.* H*oc loco uiſum eſt addere, quod cum alij obſcurè,* P*roclus tamen luculentiſsimè tradit: cuius libros (de ijs*

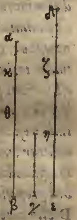
intelligo quos in Euclidem *ſcripſit) ut omnes qui quidē mathematici fieri cupiunt, ſtudioſe legant, uehementer hortor: quibus ego plurimum debere me, nunquam inficiabor. Quod ad rem attinet, id eſt huiuſmodi, principium illud Campani uniuerſaliter quantitatem omnē (ſiue ſit ea quam continuā uocant, ſiue diſcreta ſit qualis eſt numerus). compræhendere.* Porrò *aliud eſt quod quantitati continuæ ſoli conueniat, ut in infinitum minui poßit, ſicut in linea. Quantacunque enim detur in partes infinitas, minui ſiue diuidi poteſt, quarum tamē unaquæque linea erit.* Illa *porrò itidē in alias quæ eandem naturam retinent: neq; unquam ad minimum ex ſectione deuenitur, ne ſi punctum quidem dicas, quāuis illud per ſe ſit in geometria minimū.* Eo *ſit ut ſint lineæ quædam* ἄλογοι, *quarum quidē eſt inter ſe quædā proportio, ſed numero exprimi nequit, itaque uocatur à* Proclo λόγος ἄῤῥητος. Nam *ubicunque eſt ſectio ſiue diuiſio in infinitum, ibi quoque reperitur illud ineffabile, quod* ἄλογον *dicunt. hoc uerò non ita eſt in numeris.* Nul*lus enim eſt numerus quem diuidendo non reducas ad illud minimum quod eſt unitas, ex quo numeros omnes eſſe* ῥητοὺς & συμμέτρους *neceſſe eſt. omnes enim metitur unitas.* Nulli *igitur ſunt numeri* ἄλογοι. *Quod autem ad ſequentium theorematum expoſitionem attinet, hoc habetote, non fuiſſe conſilij noſtri initio ſuſcepti operis ſingulis manum admouere.* Actum *enim agere hoc quidē eſſe uidebatur, ſi quæ à maioribus recte tradita ſunt (ſunt autem bene multa) hic deſcriberem.* Neque *ſanè cupiam ſi maxime poßim, alieno labore partam gloriā*

in

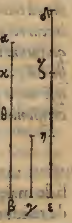
in me trāſferre: ſed morem geſtum amicis oportuit, qui me ad totius libri cōmentationem impulerunt, ut quam lucem rerum incognitarū obſcuritas deſyderaret, eam quantum in me eſſet ingenij, quantùmque diuturnum ſtudiū huius præſtantiſsimæ diſciplinæ illud adiuuiſſet, ipſe uobis afferrem, quos ueritatis ſtudio ad rerum acutiſsimarū & digniſsimarū cognitionē rapi intelligo.

Primum Theorema.

Duabus magnitudinibus inæqualibus propoſitis, ſi de maiori detrahatur plus dimidio, & rurſus de reſiduo iterum detrahatur plus dimidio, idq; ſemper fiat: relinquetur quædā magnitudo minor altera minore ex duabus propoſitis.



Sint duæ magnitudines inæquales α β, γ, quarū maior ſit α β: dico ſi de α β detrahatur plus dimidio, & de reſiduo iterū plus dimidio, idq; ſemper fiat, relinqueturq; quædā magnitudo minor ꝙ magnitudo γ. Nam γ multiplicata erit tādē aliquādo maior magnitudine α β. multiplicetur & ſit δ ε multiplex quidē ipſius γ: maior uerò ipſa α β: diuidatúrque δ ε in partes æquales ipſi γ, quæ ſint δ ζ, ζ η, η ε: & detrahatur de α β plus dimidio, ſitq; β θ. rurſus detrahatur de α θ plus dimidio, ſitq; θ κ, idque eò uſq; fiat, donec diuiſiones magnitudinis α β tot fuerint quot ſunt diuiſiones in magnitudine δ ε. Sint igitur diuiſiones α κ, κ θ, θ β totidem numero quot ſunt diuiſiones



δζ, ζκ, κε. hactenus conſtructio: deinde ſequitur demonſtratio. Quia maior eſt δε quàm αβ, & detractum eſt de δε minus dimidio, ſcilicet ipſum κε, (quæ quidem detractio intelligitur facta ex ſuperiori diuiſione ipſius magnitudinis δε, in partes æquales ipſi γ. diuidendo enim minuitur magnitudo, ſicut augetur multiplicando.) de αβ uerò detractum eſt plus dimidio βθ: reſiduum ergo κδ eſt maius reſiduo θα, quod & ueriſsimum eſt, & ad cogitãdum facillimum, ſi ad principium illud reuocetur (qualia multa ſunt in animis hominum penitus inſita) reſiduum maioris magnitudinis poſt detractum dimidium uel minus dimidio, eſſe maius reſiduo minoris poſt detractum plus dimidio. Cum itaque κδ ſit maius quàm θα, detractúmq; ſit de κδ dimidiũ, nempe κζ: & de θα ſit detractum θκ, quod eſt plus dimidio totius θα: reſiduum ergo δζ reſiduo ακ maius eſt, ratione principij modo ſcripti. Atqui δζ eſt æquale ipſi γ ex conſenſu & ſuppoſitione: ergo etiam magnitudo γ eſt maior magnitudine ακ. quod idem eſt ac ſi dicatur, minorem eſſe ακ ipſa γ. relinquitur itaque de magnitudine αβ, magnitudo ακ minor ea quæ ex duabus propoſitis minor erat. Quod erat demonſtrandum. Dictio autem illa ἄλλως, in exemplari græco poſtponẽda eſt poſt ea uerba ὁμοίως δὲ δειχθήσεται καὶ ἡμίσεα ἢ τὰ ἀφαιρούμενα. Hunc ordinem in demonſtrationibus perpetuò retinet Theon, quem compoſitorium uocant.

Nunc

Nunc autem tractemus reſolutorium per ſyllogiſmos reſoluentes theorema in ſua principia indemonſtrabilia. Sic ergo agamus· Omnis magnitudo minor δζ, eſt minor γ. Omnis α κ eſt minor δζ. Ergo omnis ακ eſt minor γ. Quod ſi cupis propius accedere ad terminos ipſius theorematis: ſit maior terminus, eſſe minorem altera minore ex duabus inæqualibus propoſitis. minor uerò ſit illa pars prior theorematis duabus inæqualibus magnitudinibus propoſitis, de maiore detracta parte dimidia maiore: iterumq́; de reſiduo, tali continuata detractione perpetuo reſiduũ ipſum. Medius terminus ſit, minorem eſſe altera magnitudine, quæ æqualis eſt ipſi minori ex duabus propoſitis. itaq; dices,

Omnis magnitudo minor altera quæ æqualis eſt minori ex duabus propoſitis, eſt minor minore ex duabus propoſitis. Duabus inæqualibus magnitudinibus propoſitis, de maiore detracta parte dimidia maiore, itidémque de reſiduo continuata tali detractione perpetua, reſiduum eſt, magnitudo minor altera quæ æqualis eſt minori ex duabus propoſitis. Ergo duabus inæqualibus propoſitis magnitudinibus detracta &c. reſiduum eſt magnitudo minor minore ex duabus propoſitis. Maior propoſitio eſt principium indemonſtrabile & per ſe notum, quod uniuerſalius dici ſolet, quæ æqualia ſunt inter ſe, ad idem eodem modo ſe habere. Minor uerò probatur ex illis uerbis demonſtrationis. Reſiduum ergo δζ reſiduo α κ maius eſt. quod idẽ ualet ac ſi dicatur α κ eſſe minus, quàm δζ. Sit ergo ſyllogiſmus per reſolutionem: reuocetúrque res ad ele-

menta, quomodo ſolẽt uti geometræ, ut paucioribus uer bis concludatur demonſtratio, eoq́; promptius ab intellectu noſtro comprehendatur. Primò *quia compoſita eſt propoſitio minor, qualitas illa adiecta prædicato, quæ æqualis eſt minori, probatur ex conſenſu & ſuppoſitione præcedentibus.* Maiorem *uerò terminum ineſſe minori ſic probabis:* Reſiduũ *minoris ex duabus magnitudinibus inæqualibus propoſitis, detractoq́; dimidio de maiore: de minore uerò detracto plus dimidio, eſt minus reſiduo maioris.* Sed *α κ eſt reſiduum minoris ex duabus magnitudinibus nempe ex θ α, κ λ &c.* Ergo *α κ eſt minus reſiduo maioris. ſed reſiduum maioris eſt λ ζ, ergo α κ eſt minus λ ζ.* Maior *uerò cõtracta eſt ex principio uniuerſali.* Si *ab inæqualibus inæqualia auferas, reſidua ſunt inæqualia, & minus id quod reſiduũ eſt, eius à quo plus ablatum eſt.* Quantum *ad minorem propoſitionem attinet, illud ſolùm probatione indiget, α κ eſſe reſiduum minoris. primò reſiduum eſſe patet, ex ſuppoſitione.* Quod *uerò magnitudo θ α (cuius reſiduum eſt α κ) ſit minor magnitudo κ λ, patet ita.* Reſiduum *minoris magnitudinis ex duabus inæqualibus, detractoq́; minus dimidio de maiore: de minore uerò plus dimidio, eſt minus reſiduo maioris.* Sed *θ α eſt reſiduum minoris ex duabus magnitudinibus inæqualibus, detractoq́; minus dimidio ex maiore λ ι: de minore uerò α β plus dimidio &c.* Ergo *θ α eſt minus reſiduo maioris. ſed reſiduum maioris eſt λ κ, ergo θ α eſt minus quàm λ κ.* Maior *patet ex principio indemõſtrabili.* Minor *uerò probatur, primò quòd θ α ſit reſiduum. probatur ex ſuppoſitione,*

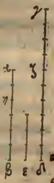
ſitione, propter detractionē factam. Quòd uerò α β ſit minor quàm δ ι, patet ſimiliter ex ſuppoſitione & principio: quamlibet quantitatem toties poſſe multiplicari &c. Addit Theon hoc quoq; theorema uerum eſſe, etiā ſi partes detractæ ſint dimidiæ. Quòd uerò dicitur in theoremate, Si detrahatur plus dimidio, eò pertinet ut ſi minus dimidio detrahatur, non ſemper uerum ſit reſiduum eſſe minus minore ex duabus propoſitis.

Secundum Theorema.

Duabus magnitudinibus propoſitis inæqualibus, ſi detrahatur ſemper minor de maiore, alterna quadam detractione, neque reſiduum unquam metiatur, id quod ante ſe metiebatur, incommenſurabiles ſunt illæ magnitudines.

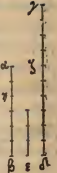
videtur ea vox abundare si graecus codex consulatur. vel dicatur id quod ante se erat.

Sint magnitudines duæ inæquales α β, γ δ: minórq; ſit α β: detractaq; per detractionem alternatim, & ſemper cōtinuatā minore de maiori: id quod relinquitur ex ea quæ maior fuerat ante detractionē, nunquam metiatur hoc ipſum, quod antequā id reliquum fieret, metiebatur maiorem magnitudinem. Dico incommēſurabiles illas eſſe magnitudines α β, γ δ. Quod ſi neges, illud cōtinuo affirmas, commēſurabiles eas eſſe. Porro ſi ſint commenſurabiles, metietur eas quædam communis magnitudo per diffinitionem linearum commenſurabilium. Metiatur itaque, ſi fieri poteſt: eáque ſit ι, detrahatúrque de maiori



diuisio linearum in particulas est inepta.

magnitudine γ δ pars quædam, puta δ ζ quæ ſit æqualis maiori magnitudini α β: aut ſi æqualis non erit, ſit tamen huiuſmodi, ut illa minor magnitudo α β aliquot uicibus repetita, repræſentet ipſam magnitudinem δ ζ. hoc enim eſt quod dicitur, magnitudinem α β metiri δ ζ: talique detractione facta, minoris inquam de maiore, relinquatur ex maiore portio quædam γ ζ minor magnitudine α β. hoc uerò eſt quod dicitur in theoremate, neq; reſiduum unquam metiatur id quod ante ſe erat. Simili*ter de α β detrahatur portio quædam β κ æqualis magnitudini γ ζ, relinquatúrque ex ea detractione portio α κ minor quàm γ ζ, ídque ſemper ſi ſit opus fiat, ſaltem dum relinquatur quædam magnitudo minor ipſa magnitudine ι. hoc enim tandem euenire neceſſe eſt, per primum theorema huius,* Si *propoſitis illis duabus magnitudinibus inæqualibus α β, ι, (quarum minor ex conſenſu & ſuppoſitione tua erat ι. hanc enim poſuiſti eſſe communem menſuram duarũ magnitudinum α β, γ δ, itaque minorem alterutra) de maiore α β detrahatur plus dimidio, itémque de reſiduo plus ſuo dimidio: itaque relicta ſit α κ minor quàm ι. hactenus ea quæ ad ſtructuram pertinẽt. nunc ad demonſtrationem ueniamus.* Cum *igitur magnitudo ι metiatur magnitudinẽ α β, ipſa uerò α β metiatur δ ζ: etiam ι metietur ſimiliter magnitudinem δ ζ per communem cõceptionem.* Si *magnitudo quædam metiatur aliam, metietur quoque omnem aliam ab ea menſuratam. cui ſimile quiddam*



minori

appoſuit

appoſuit Campanus in numeris inter principia ſeptimi. Itaque ι metietur δ ζ. eadem etiã magnitudo ι metitur totam magnitudinem γ δ ex tua ſuppoſitione, poſitum enim eſt eam eſſe communem menſuram ambarũ α β, γ δ. Ergo ι metietur & ipſum reſiduum, quod eſt γ ζ, per illam communem conceptionem, Quæ magnitudo metitur aliam totam, & partem ab ea detractã, metitur quoque reliquã. Idem in numeris poſuit Campanus. Cum itaque ι metiatur γ ζ: γ ζ autem metiatur β κ: ipſa quoque ι metietur β κ per ſuperiorem illam conceptionem. Atqui ι metitur totam magnitudinem α β: itaque per alteram conceptionẽ metitur reſiduum α κ. Metietur ergo maior magnitudo aliam ſe ipſa minorẽ. hoc autem fieri nullo modo poteſt, ut antè diximus inter principia. Non igitur illas magnitudines α β, γ δ metietur ulla magnitudo. Incommenſurabiles igitur erunt α β, γ δ. Duabus itaque magnitudinibus propoſitis inæqualibus et cæt. quod demonſtrandum erat.

Hæc demonſtratio concluſa eſt per deductionem ad impoßibile. Poſitum eſt enim contradictorium concluſionis uerum. ex qua propoſitione per plures gradus ſyllogiſmorum deuentum eſt tandem ad id quod falſißimum eſt, nempe maiorem magnitudinem eſſe quæ minorem metiatur. Quia ergo ex ueris nunquam colligitur falſum: nunc autem concluſa eſt hæc falſitas, neceſſe eſt poſitionem illam tuam falſam extitiſſe. quod ipſum per deſtructionem conſequentis oſtendi poſſe tradunt dialectici. Falſum autem eſt maiorem metiri minorem. quod conſequens erat ad illud antecedens,

duas magnitudines α β, γ δ eſſe commēſurabiles. ſequitur ergò ipſum antecedens falſum eſſe. Incommenſurabiles *ergo neceſſe eſt eſſe α β, γ δ.* Verum *ex quibus medijs proceſſerit illa concluſio falſa, maiorem magnitudinem metiri minorem, uideamus per reſolutionē, ſitq; ſyllogiſmus huiuſmodi.* Omnis *magnitudo metiens totam magnitudinem α β, & de ea detractam κ β, metitur reſiduum α κ.* Magnitudo *ι eſt magnitudo metiens totam α β, & detractam κ β.* Ergo *magnitudo ι metitur reſiduum α κ. falſa eſt concluſio, quia poſitum fuit α κ eſſe minorem quàm ι.* Maior *eſt indemonſtrabilis, cōtracta ex principio uniuerſali: quod quale eſſet, antè retulimus.* Minoris *uerò probatio quia plura continet, hinc petēda eſt.* Primò *ex ſuppoſitione magnitudo ι metitur totam α β. deinde quòd eadem ι metiatur detractam partem quæ eſt κ β, ita probatur.* Omnis *magnitudo metiens magnitudinem γ ζ, metitur & κ β, quam γ ζ metitur. ι metitur γ ζ, ergo ι metitur & κ β.* Maior *ſimiliter eſt per ſe nota ex principio uniuerſali.* Quæcunque *magnitudo metitur aliam, metitur & eam quam ipſa metitur.* Minor *uerò ſic probatur.* Omnis *magnitudo metiens totam magnitudinem γ δ, & detractā δ ζ, metitur & reſiduum γ ζ. ι metitur totam magnitudinem γ δ, & detractā δ ζ, ergo ι metitur γ ζ.* Maior *iterum per ſe nota eſt ex principio.* Minor *uerò quia duo membra habet, ita probatur.* Primò *ι metitur totā magnitudinem γ δ ex ſuppoſitione. deinde quòd eadem ι metiatur δ ζ, ita probandū eſt.* Omnis *magnitudo metiēs α β, metitur & δ ζ quam metitur α β. ι metitur α β,*

ergo

ergo ε metitur & δζ, quam metitur αβ. Maior *uerisſima eſt, & per ſe nota.* Minorē *uerò falſam eſſe ideo neceſſe eſt, quia cauſa fuit illius concluſionis falſæ, nempe quòd maior magnitudo minorē metiatur.* Non *erit itaque ε communis menſura ambarum magnitudinū αβ, γδ.* Idem *reperies, ſi quācunque aliam magnitudinē poſueris pro communi illarum menſura. Quia igitur nulla reperiri poteſt, erunt illæ magnitudines incommenſurabiles, quod demonſtrandum erat.* Ex *hoc elicitur* πόρισμα *ſiue corollarium à deſtructione conſequentis.*

Si duæ magnitudines inæquales propoſitæ nō fuerint incommenſurabiles, ſed fuerint commenſurabiles: continuata detractione minoris alternatim facta de maiore, neceſſe eſt reſiduum metiri id quod ante ſe metiebatur. Tertium Theorema.

Duabus magnitudinibus commenſurabilibus datis, maximam ipſarū cōmunē menſurā reperire.

Sint datæ duæ magnitudines commenſurabiles αβ, γδ, quarum minor ſit αβ: oportet itaque magnitudinum αβ, γδ maximam communem menſuram reperire. Primum *ipſa magnitudo αβ aut metitur γδ, aut nō metitur. Si itaque αβ metitur γδ, ſeipſam quoque cū metiatur, ipſa ergo αβ eſt communis menſura magnitudinum αβ, γδ.* Maniſeſtum *porrò eſt maximā quoque eam ambarum menſuram communē eſſe.* Nam *nulla maior magnitudo quam αβ metietur ipſam αβ.* Sed *ne metiatur αβ ma-*

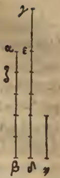


gnitudinem γ δ. Detracta igitur per mutuã detractionem minore de maiori, reſiduũ metietur aliquando id quod ante ſe eſt per præcedens corollarium Nam data ſunt magnitudines α β, γ δ eſſe commenſurabiles. itaque magnitudo α β metiendo ε δ partem magnitudinis γ δ, relinquat magnitudinem ε γ ſe α β inquam minorem. Ipſa uerò ε γ metiendo magnitudinem ζ β partẽ magnitudinis α β, relinquat ſimiliter α ζ ſe ε γ inquam minorem.



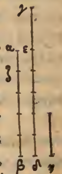
Ipſa uerò α ζ metiatur magnitudinem γ ε. Illud autẽ eſt metiri, id quod ante ſe eſt, quãdo nihil relinquitur poſt menſurationem factam. hactenus conſtructio. ſequitur ſtatim demõſtratio. Cum igitur α ζ metiatur magnitudinem γ ε: γ ε autẽ metiatur ζ β: ergo α ζ metitur magnitudinem ζ β. Sed α ζ metitur ſeipſam: ergo α ζ metietur α β. Sed quia α ζ metitur δ ε: ergo α ζ metietur δ ε. Sed eadem α ζ metitur γ ε: totam ergo γ δ metietur: ergo α ζ metietur ambas magnitudines α β, γ δ, earúmq; cõmunis mẽſura erit. Dico præterea illam eſſe communẽ utriuſque maximam menſuram. Quod ſi neges illam eſſe maximam menſuram: erit itaque magnitudo quædam maior quàm α ζ, quæ metiatur utramque α β, γ δ. ea uero ſit η. Cum igitur per te η metiatur α β: ipſa autem α ζ metiatur ε δ: ergo η metietur ε δ. ipſa etiam η per te metitur totam γ δ: ergo metietur & reſiduũ γ ε. Sed cum γ ε metiatur ζ β, etiam η metietur ζ β. metitur uerò eadem η per te totam α ζ: ergo metietur & reſiduũ α ζ. Itaque magnitudo maior metietur minorem: quod ſane fieri

ſieri nullo modo poteſt. Nulla ergo maior magnitudo quàm α ζ metietur utramq; α β, γ δ: ergo α ζ eſt maxima earum communis menſura. Duarum igitur magnitudinum commenſurabilium α β, γ δ reperta eſt communis maxima mēſura, nempe α ζ. quod faciendū fuit.



Corollarium.

Ex hoc cōcluditur, ſi magnitudo quæpiam duas alias magnitudines metiatur, metietur quoque & communem utriuſq; maximam mēſuram. Hoc corollarium probatur ex poſtrema parte demōſtrationis. Sint duæ magnitudines α β, γ δ, quarum ſit maxima communis menſura α ζ: ſit porrò alia η quæ etiam metiatur utramque α β, γ δ. dico magnitudinem η metiri α ζ. Sint eædem ſuppoſitiones quas modò poſuimus. Cum igitur η metiatur α β: α β autem metiatur ε δ: ergo η metietur ε δ. Sed η metitur etiam totā γ δ: metietur ergo & reliquum γ ε. Sed quia γ ε metitur ζ β: ergo η metietur ζ β. ſed metitur totam α β: metietur ergo & reliquum, quod eſt α ζ. ergo η metiens utrāque α β, γ δ, metietur & maximam utriuſque communem menſuram, nempe α ζ. Docet Proclus differentiam inter problemata & theoremata geometrica eā eſſe, ut problemata ſint ea quæ proponunt aliquid fieri oportere, qualia ſunt omnia quæ uerbo infinito concipiuntur, ut reperire, cōſtituere, ſecare, & ſimilia. Theoremata uerò ſunt quæ aſſerendo ponunt & definiūt de unoquoq; accidente cuiuſque ſubiecti, qualia ſunt duo prima huius libri. Hoc autem 3. problema eſt. Huius ergo pro-



blematis demonſtrationem ſic reſoluere nos oportet. Primùm aggrediamur partẽ eã quæ ſyllogiſmo directo & categorico cõcludit ipſam magnitudinẽ α ζ eſſe cõmunem menſurã magnitudinũ α β, γ δ. Omnis magnitudo metiens magnitudines γ ε & ε δ, metitur totam γ δ. Sed α ζ metitur γ ε & ε δ: ergo α ζ metitur totam γ δ. Maior patet ex principio indemonſtrabili. Quæcũq; magnitudo metitur duas, metitur etiam compoſitam ex illis, cuius ſimile ponit Campanus in numeris inter principia libri ſeptimi. Minoris pars illa quod α ζ metiatur γ ε, patet per corollarium ſecundi theorematis. Quòd uerò eadẽ α ζ metiatur ε δ, probatur: Omnis magnitudo metiens α β, metitur δ ε menſuratam ab α β. Sed α ζ metitur α β: ergo α ζ metitur δ ε. Maior patet ex principio. Quæcunq; magnitudo metitur aliam, metitur quamcunque menſuratam ab ea. Minorẽ ita probabis: Omnis magnitudo metiens magnitudines α ζ, ζ β, metitur & totam compoſitam ex illis α β. Sed α ζ metitur α ζ, ζ β: ergo α ζ metitur totam α β. Maior ex principio eodẽ patet. Minoris pars quod α ζ metiatur α ζ, patet etiam ex eo, quia omnis magnitudo ſeipſam metitur per unitatem. Quòd uerò α ζ metiatur ζ β, probatur ſic. Omnis magnitudo metiens γ ε, metitur & ζ β, menſuratã ab ea. Sed α ζ metitur γ ε, ergo α ζ metitur ζ β. Maior pendet ex principio. Minor etiam pendet ex antè dictis. Nunc uerò reſtat perſequẽda pars illa demonſtrationis, qua oſtẽditur magnitudinem α ζ communem utriuſque α β, γ δ menſuram: eſſe

præterea

*præterea maximam ambarum cõmunem menſurã.hoc autem fit per deductionem ad impoſsibile.*Nam *ſi neges illam* α ζ *eſſe menſuram maximam communem utriuſque magnitudinis* α β, γ δ. *ſit alia maior quàm* α ζ *maxima communis utriuſque menſura quæ ſit* η. Tunc *dico te deductum iri ad illud impoſsibile magnitudinem maiorem, nempe* η *metiri minorem, ſcilicet* α ζ. Manentibus *enim his quæ ſuperius poſita ſunt*: Omnis *magnitudo metiens totam* α β, & *de ea partem detractam* ζ β, *metitur & reſiduũ* α ζ. *Sed* η *metitur totam* α β & *detractam* ζ β: *ergo* η *metitur* α ζ. *Maior eſt indemõſtrabilis.*Minor *ſic probatur.* Primum η *metitur totã* α β *ex tua poſitione.* Quod *uerò eadem* η *metiatur* ζ β, *probo.* Omnis *magnitudo metiens* γ ε *metitur* ζ β *quam* γ ε *metitur.* Sed η *metitur* γ ε, *ergo* η *metitur* ζ β. Maior *rurſum nõ eget probatione.*Minoris *probatio hinc deducitur.*Omnis *magnitudo metiens totam* γ δ & *eius partẽ* δ ε, *metitur & reſiduũ* γ ε. *Sed* η *metitur totam* γ δ & *eius partem* δ ε, *ergo* η *metitur* γ ε. Maior *item eſt indemonſtrabilis.* Minoris *probationẽ ſic deduces*: Primũ *quod* η *metiatur totam* γ δ, *patet ex tua poſitione.*Quòd *uerò eadem* η *metiatur* δ ε, *ſic agas*: Omnis *magnitudo metiens* α β, *metitur* δ ε *menſuratam ab ea.* Sed η *metitur* α β: *ergo* η *metitur* δ ε. Maior *eſt indemonſtrabilis.* Minor *patet ex tua poſitione quãdo uoluiſti* η *eſſe communem maximam menſuram utriuſque nẽpe* α β, γ δ. *ex qua quia ſequitur illa cõcluſio falſa, ſcilicet maiorem* η *metiri minorẽ* α ζ, *neceſſe eſt illã tuam poſitionem falſam extitiſſe.nam ex ueris nõ ſequi falſum*

compertum eſt.Ergo κ non erit communis utriuſque ma xima menſura. idemq; fiet ſi quācunq; aliam poſueris. Conſtat igitur α ζ eſſe communem maximam utriuſque menſuram. Quod autem hoc problemate proponitur inquirendum ,id licet in theorema conuertere colle-cta ſumma totius demonſtrationis , propoſitis duabus magnitudinibus inæqualibus & commenſurabilibus:ſi minor metitur maiorem,illa eſt communis maxima utriuſque menſura:ſin minus,facta mutua detra ctione quandocunque reſiduum metitur id quod ante ſe metiebatur poſtremo, illa eſt communis utriuſque mẽ ſura atque ea maxima. Simili ratione poteris ex quocunque problemate theorema efficere.

Quartum Theorema.

Tribus magnitudinibus commenſurabilibus datis, maximam ipſarum communem menſuram reperire.

*Sint datæ tres magnitudines cōmenſurabiles α,β,γ, oportet ipſarum communem maximam menſuram reperire. Sumatur maxima communis duarum priorum α,β,menſura per præcedens problema,ſitq; δ:hæc magnitudo δ,aut metitur magnitudinem tertiam quæ eſt γ, aut eam non metitur.metiatur prius.*Hacte-*nus conſtructio huius partis,nunc ad demonſtrationem.*Cum *itaque δ metiatur γ, metiatúrq; magnitudines α,β,*Ergo *δ metietur α,β,γ: ipſarúmque communis men-*



ſura

*ſura eſt.*Præterea *hanc eſſe illarum maximam communem menſuram conſtat hac ratione.* Nam *nulla magnitudo maior quàm δ metietur illas α,β,γ.Quod ſi fieri poſſe defendis,ſit magnitudo ε maior quàm δ,quam dicis metiri magnitudines illas α,β,γ.Cum itaque ε per te metiatur α,β,γ,metitur duas priores ex illis ſcilicet α,β: & præterea maximam cõmunem utriuſque menſuram,nempe δ per corollarium præcedẽs.Ergo ε maior quàm δ,metietur ipſam δ,quod eſt impoſſibile.Sed ne metiatur δ magnitudinem γ,hoc primum dico magnitudines γ,δ eſſe commenſurabiles. quod ita demonſtratur.* Cum *ſint commenſurabiles datæ magnitudines α,β,γ,metietur eas profectò quædam magnitudo quæ ſimiliter metietur ſeparatas ex illis duas α,β. Quare metietur quoque maximam communem utriuſque menſuram,nempe δ.*Metitur *etiam ipſa eadem magnitudinẽ γ. Quare metietur utranque γ,δ.*Ergo *γ,δ ſunt commenſurabiles ex definitione.Sumatur itaque maxima communis mẽſura ambarum γ,δ,ſitq; ε.Hactenus conſtructio huius partis,nunc eſt demonſtratio.Quoniã ε metitur δ,& δ metitur magnitudines α,β, itaque ε metietur α,β.metitur præterea magnitudinem γ. Ergo ε eſt communis mẽſura trium α,β,γ.* Dico *autem illam etiam eſſe maximam.Nam ſi fieri poteſt ut ε non ſit maxima menſura communis trium α,β,γ,ſit quædam maior quàm ε,magnitudo ζ,metiatúrque tres illas α,β,γ. Cúmq; ζ metiatur α,β,γ,etiam metietur α, β, & ipſarum maximam*



communem utriuſque menſurã, nempe δ. Metitur præterea ipſa ζ magnitudinem γ. ergo ζ metitur γ, δ, & ambarum communem maximã menſuram, nempe ε. Maior uidelicet magnitudo minorẽ hoc uero fieri nullo modo poteſt. Nulla ergo maior quàm ε magnitudo metietur magnitudines α, β, γ. Ergo ε eſt maxima trium dictarum communis menſura. ſiquidem δ non metitur magnitudinem γ. Quòd ſi δ metitur γ, ipſamet δ erit communis trium maxima menſura. Datis igitur tribus magnitudinibus commenſurabilibus, reperta eſt ipſarum communis maxima menſura, quod faciendum erat.



Corollarium.

Ex hoc manifeſtum relinquitur, ſi magnitudo tres magnitudines metiatur, metiri quoque maximam communem ipſarum menſuram. Similiter etiam in pluribus magnitudinibus maxima illarum communis menſura reperitur. In illis quoque uerum erit hoc corollarium. Huius corollarij demonſtratio continetur in poſtremis uerbis ipſius Theonis. itaque dices: Sint tres magnitudines α, β, γ, quarum communis maxima menſura ſit ε. ſit porrò alia ueluti ζ, ipſa quoque metiẽs tres illas magnitudines, dico ζ metiri ε. Demonſtrationẽ autem requires ab illis uerbis. Cumq; ζ metiatur α, β, γ etiã metietur α, β uſque ad ea uerba, Maior uidelicet: Hæc demõſtratio quia uarias partes habet, ſingulæ uerò pluribus ſyllogiſmis cõtinẽtur: ſingillatim omnes reſoluemus. Primò ſi δ communis maxima menſurã ambarum

barum α,β metiatur γ per ſe,clarum eſt magnitudinem δ eſſe communem menſuram magnitudinum α, β, γ. Quod uerò eadem δ ſit earumdem communis menſura maxima,hinc liquet per deductionem ad illud impoßibile,Maiorem magnitudinem metiri eam quæ ſe ipſa minor eſt. Nam ſi negas δ eſſe maximam menſuram,ſit quæuis maior quàm δ,uidelicet ε metiens illas α,β,γ.Ex hoc ſequitur ε metiri ipſam δ,quod falſum eſt & impoßibile, cum maior non metiatur minorem.

Omnis magnitudo metiens α,β,metitur δ maximam α,β, menſuram.Sed ε metitur α,β: ergo ε metitur δ.Maior patet,quia collecta ex corollario ſuperioris problematis. Minor patet ex tua poſitione. quam tamen falſam eſſe conſtat, quia cauſa eſt falſitatis illius ex ea conſequentis. Verum eſt itaque δ eſſe communem & maximam trium menſuram,ſi modò δ metitur γ. Sin autẽ δ non metiatur γ,illud imprimis uerum eſſe dico (quod ueluti lemma quoddã demonſtrandũ eſt antequã eatur ulterius) magnitudines γ,δ,eſſe cõmẽſurabiles. Omnes magnitudines quas eadẽ mẽſura metitur, uidelicet θ,ſunt cõmenſurabiles.Sed γ,δ ſunt magnitudines quas eadẽ mẽſura metitur,uidelicet θ. ergo γ, δ ſunt cõmẽſurabiles. Maior patet ex definitione. Minor patet ex eo, quia α,β,γ,poſitæ ſunt cõmẽſurabiles per cõmunẽ mẽſurã, uidelicet θ.ſic itaq; probabitur Omnis magnitudo metiẽs tres α,β,γ,metitur duas priores, & maximã mẽſuram duarũ priorũ nempe δ,per corollarium præcedentis theorematis.Sed θ metitur tres α,β,γ. ergo θ metitur δ.Quod autẽ θ metiatur γ,patet ex poſitione. Cũ

igitur θ *metiatur utrãq; γ,λ,ſequitur ex definitione am bas γ,λ eſſe cõmẽſurabiles.Sit maxima cõmunis mẽſura ipſarũ γ,λ,quæ uocetur* ι. *Dico primo ipſam* ι *eſſe cõmunem menſurã trium α,β,γ ſic probari. Omnis magnitudo metiẽns λ, metitur α,β, menſuratas à λ. Sed* ι *metitur λ, ergo* ι *metitur α,β.*Maior patet ex principio. Minor uerò ex *ſuppoſitione quandõ, poſitum eſt ipſam* ι *eſſe maximam communem menſuram duarum γ,λ, ex eadem etiam ſuppoſitione* ι *metiebatur γ.*Ergo ι *metitur α,β,γ, eſtq; earum communis menſura. Dico prætere a eandem* ι *eſſe communem maximam menſuram earũdem trium.ſin minus,eſto magnitudo quædã maior quàm* ι *metiẽs illas,ſitq;* ζ.Ex *hac poſitione ſequi uidebis illud idem impoßibile,maiorem ζ metiri minorẽ* ι. *Omnis magnitudo metiens γ, λ, metitur* ι *communem maximam utriuſque menſuram.Sed ζ metitur γ,λ,ergo ζ metitur* ι.*Maior patet ex corollario ſuperiori.* Mi*nor uerò ita probatur.*Primò *quod ζ metitur γ,patet ex ſuppoſitione,quia poſitũ eſt eam metiri ſingulas α,β,γ.* Q*uod uerò eadem ζ metiatur λ probatur.* Omnis *magnitudo metiens α,β,metitur & λ communem utriuſque maximam mẽſuram.*Sed *ζ metitur α,β, ergo ζ metitur λ.*Maior *patet ex corollario.* Minor *uerò à te poſita eſt,quæ cum ſit unica cauſſa illius falſæ concluſionis, neceſſe eſt ipſam quoq; falſam eſſe.*Nulla *ergo alia magnitudo quàm* ι *erit communis illarum trium maxima menſura.* Hoc *autem problema potes redigere in formam theorematis hoc modo*· Si *maxima mẽſura duarum primarum ex tribus commenſurabilibus magnitudinibus*

tudinibus metitur tertiam, illa eſt communis maxima menſura trium. ſin minus, maxima menſura tertiæ & maximæ menſuræ duarum primarum eſt cõmunis maxima menſura trium.

Quintum Theorema.

Cõmẽſurabiles magnitudines inter ſe proportionẽ eam habent, quã habet numerus ad numerũ.

M*agnitudines dicũtur inter ſe proportionem habere, quã habet numerus ad numerum, quãdo quæ proportio eſt inter illas magnitudines, ea reperitur inter aliquos numeros, ut puta ſi magnitudo magnitudini ſit, uel æqualis, ut numerus 2 numero 2: uel dupla, ut numerus 4 ad 2: uel tripla, ut 6 ad 2: uel in alia quauis multiplici proportione. Idem de ſuperparticulari, ſi magnitudo ſit ſeſquialtera ad magnitudinem, ut numerus 3 ad numerum 2. Idem de aliis ſpeciebus ſuperparticularis proportionis. Idem de ſuperpartienti, de multiplici ſuperparticulari, & de multiplici ſuperpartienti, quæ ſunt omnia proportionum genera, quæ in numeris repe riuntur. Sint magnitudines commẽſurabiles α, β.* Dico *ipſas habere proportionem inter ſe, quã numerus aliquis ad aliquem aliũ numerum.* Nam *cùm ſint commenſurabiles α, β, ſit γ cõmunis earũ mẽſura, & quoties γ metitur α, (id eſt quot partes reperiũtur in α æquales ipſi γ) tot ſint unitates in numero δ. quoties uerò eadem γ meti-*



tur β, tot ſint unitates in numero ι. Sequitur demonſtratio. *Cum itaque γ metiatur α toties quot ſunt unitates in δ numero, ipſáque unitas metiatur numerũ δ toties quot ſunt in ipſo δ unitates. totidem ergo uicibus γ metitur α, quot uicibus unitas metitur numerum δ.* Ergo *γ eandem proportionem habebit ad α, quam unitas ad numerum δ. per conuerſam etiam proportionalitatem erit ut α ad γ: ſic numerus δ ad unitatem.* Rurſum *cum γ metiatur β toties quot ſunt unitates in numero ι: metiatúrque unitas numerum ι toties, quot ſunt in eo unitates. tot uicibus itaque γ metietur β, quot uicibus unitas metitur numerum ι.* Ergo *per æquam proportionalitatem (hanc uerò uocat* Euclides *δι' ἴσου λόγου) quam proportionem habet magnitudo α ad magnitudinem β, eandem habet numerus δ ad numerum ι.* Itaque *commenſurabiles magnitudines, puta α, β, inter ſe proportionem eam habent, quam numerus δ ad numerum ι. quod demonſtrandum erat.*



Reſolutio.

Omnia extrema duorum ordinum continentium æqualẽ numerum magnitudinum coniugatarum in eadẽ proportione, ſunt & ipſa in eadem proportione. Sed *α, β, & δ, ι ſunt extrema duorum ordinum, &c.* Ergo *α, β, & δ, ι ſunt in eadem proportione.* Maior patet ex 22.5. Minoris *pars prior ſcilicet α, β & δ, ι eſſe extrema duorum ordinum æqualem numerum continentiũ magnitu-*

magnitudinum patet ex ſuppoſitionibus admiſsis in cõſtructione. Quod uerò magnitudines contentæ in illis ordinibus ſint in eadem proportione coniugatæ, id eſt ſingula paria prioris ordinis cum ſingulis paribus alterius ſint proportionalia, probatur ita· Primò quòd γ, β *habeant eandem inter ſe proportionem quam unitas & numerus* ι, δ. *Omnis magnitudo metiens* β *tot uicibus, quot uicibus unitas metitur* ι, *habet ad* β *eandem proportionem, quam unitas ad numerum* ι. *Sed* γ *tot uicibus metitur* β *quot uicibus unitas metitur* ι. Ergo γ *habet ad* β *eandem proportionem, quam unitas ad numerum* ι. Maior *per ſe patet contracta ex definitione proportionalium, quæ eſt in principiis lib*. 5. *de quibus doctiſsime differentem lege* Petrum Nonium Luſitanũ. Minor *uerò conceſſa eſt per ſuppoſitionem. Quod uerò* α, γ *habeant eam proportionem quam numerus* δ *ad unitatem, probatur eodem modo*· *Omnis magnitudo quam metitur* γ *tot uicibus quot unitas metitur numerum* δ, *habet ad* γ *eandem proportionem quam numerus* δ *ad unitatem*. *Sed* α *eſt magnitudo quam metitur* γ *tot uicibus, &c*. Ergo α *habet ad* γ *eandẽ proportionem quam* δ *ad unitatem*. Maior *probatur eodem modo quo ſuperior*. Minor *item patet ex ſuppoſitione*. Vt *uerò reperias numeros duos, quorum proportionem habeant inter ſe duæ magnitudines commenſurabiles, uide quot uicibus menſura earum communis unamquãque metiatur*. Numeri *enim uicibus illis expreſsi retinent eam proportionem, quam magnitudines commenſurabiles*.

Sextum Theorema.

Si duæ magnitudines proportionem eam habent inter ſe quam numerus ad numerum, commenſurabiles ſunt illæ magnitudines.



Duæ enim magnitudines α, β, inter ſe habeant eam proportionem, quam numerus δ ad numerum ε. Dico cõmenſurabiles eſſe magnitudines α, β. Nam magnitudo α diuidatur in tot partes æquales quot ſunt unitates in numero δ (hoc uerò idem eſt ac ſi uelis quamcunque partem auferre de magnitudine α, quod quomodo fiat, docet 9.6.) ſitque magnitudo γ æqualis uni ex illis partibus æqualibus ipſius α. ſit etiam alia magnitudo ζ compoſita ex tot magnitudinibus æqualibus ipſi γ, quot unitates ſunt in numero ε. Hìc incipit demonſtratio. Cùm igitur tot magnitudines æquales ipſi γ ſint in magnitudine α, quot ſunt unitates in δ, quota pars ipſius δ eſt unitas, eadem pars erit magnitudo γ magnitudinis α. Eſt ergo ut γ ad α, ita unitas ad δ. metitur uerò unitas numerum δ. ergo & γ metietur α. Et quia eſt ut γ ad α, ſic unitas ad numerum δ. conuerſa igitur proportione erit ut α ad γ, ſic numerus δ ad unitatem. Rurſum quia quot ſunt unitates in numero ε, tot ſunt in magnitudine ζ magnitudines ſiue partes æquales ipſi γ. Erit itaque ut γ ad ζ, ſic unitas ad ε. Nuper uerò concluſum eſt ſicut α ad γ, ita

numerus δ ad unitatem. Per æquam igitur proportionem erit ut α ad ζ, ſic δ ad ι. Sed ſicut δ ad ι, ita ſe habet α ad β. Itaque etiam ut α ad β, ſimiliter ſe habebit α ad ζ. Ipſa igitur magnitudo α ad utranque β, ζ, eandem proportionem retinebit. Aequalis eſt igitur magnitudo β magnitudini ζ per ſecundam partem 9. 5. Sed γ metitur ζ, ergo metietur β. Sed & eadem γ metitur α, igitur γ metitur α, β. commenſurabiles igitur ſunt magnitudines α, β. Si ergo duæ magnitudines &c. quod demonſtrandum fuit.

Reſolutio.

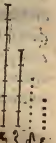
Omnes magnitudines quas eadem menſura metitur, ſunt commenſurabiles. Sed magnitudines α, β, habentes proportionem inter ſe quam numerus ad numerum, metitur eadẽ menſura, puta γ. Ergo magnitudines α, β, habentes proportionem inter ſe quam numerus ad numerum, ſunt commenſurabiles. Maior patet ex definitione commenſurabilium magnitudinum. Minoris *uerò pars illa quòd γ metiatur β, ita probanda eſt.* Magnitudo *ζ eſt magnitudo β, quia æquales. γ metitur ζ, ergo γ metitur β.* Minor patet ex conceſsione ſuppoſita *inter conſtruendum, illis uerbis, Sit etiam alia magnitudo ζ.* Maior ſic probatur. *Omnes magnitudines ad quas eadem magnitudo, puta α eandem proportionem habet, ſunt æquales. Sed ζ, β ſunt huiuſmodi. ergo ζ β ſunt æquales.* Maior patet ex ſecunda parte nonæ quinti. Minor uerò ita probetur. *Omnes proportiones æquales eidem proportioni, puta ei quæ eſt inter δ, ι numeros, ſunt inter ſe æquales. Sed proportiones inter α, ζ & α, β ſunt æquales eidẽ proportioni, puta quæ eſt*

inter δ,ι. Ergo proportiones inter α,ζ & α, β ſunt inter ſe æquales. Maior patet ex undecima quinti. Minoris pars illa, quòd proportio inter α,β ſit æqualis ei quæ eſt inter δ,ι numeros, patet ex ſuppoſitione. Quòd uerò α,ζ eandem habeant proportionem quam δ,ι, probetur ſic: Omnia extrema duorum ordinum æqualem numerum continentium magnitudinum coniugatarũ in eadem proportione, ſunt & ipſa in una & eadẽ proportione. Sed α,ζ, & δ,ι ſunt extrema duorũ ordinũ, &c. Ergo α,ζ & δ,ι ſunt in una & eadem proportione. Maior patet ex 22.5. Minoris uerò pars prior ſcilicet α,ζ & δ,ι eſſe extrema duorum ordinum æqualem numerum continentium magnitudinum, patet ex ſuppoſitionibus admiſsis in conſtruendo. Nam primus ordo eſt α,γ,ζ. Secundus uerò eſt δ,κ,ι. κ enim eſt loco unitatis. Quòd uerò magnitudines in his ordinibus cõtentæ ſint in eadem proportione cõiugatæ, probetur. Et primo loco α,γ habere inter ſe eandem proportionẽ quam δ ad unitatem κ, patet ex ſuppoſitione admiſſa inter cõſtruendũ illis uerbis, Nam magnitudo α diuidatur in tot partes æquales, &c. Quanuis ea pars ſyllogiſmo quoque demonſtrari poſsit. Omnes quatuor magnitudines inter ſe proportionales, ſunt quoque conuerſa proportione proportionales. Sed γ,α,κ unitas & δ ſunt magnitudines proportionales. Ergo γ,α,κ & δ ſunt conuerſa proportione proportionales. Maior patet per corollariũ quarti theorematis libri quinti. Minor uerò patere poteſt ex ſuppoſitione, illis uerbis, Nam magnitudo α diuidatur. Secundum erat in illa minore γ, ζ habere eandem proportionem

portionem quam unitas & ε. quod quidem etiã patet ex ſuppoſitione inter conſtruẽdum admiſſa illis uerbis, Sit etiam alia magnitudo ζ. Quantum ad alteram partem minoris aſſumptæ in primo ſyllogiſmo, nempe γ metiri magnitudinem α, ea quoque patet ex illa ſuppoſitione, Nam magnitudo α diuidatur, &c. Nihilominus *poteſt & ipſa ſyllogiſmo demõſtrari: ſed quia eſt ex ſuppoſitione nota, nihil eſt opus ſyllogiſmo.*

Corollarium.

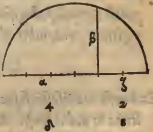
Ex *hoc fit manifeſtũ, ſi fuerint duo numeri ut δ, ε, & recta linea ut α, dari poſſe aliam lineam ad quam linea α retineat eandem proportionem quã numerus δ ad numerum ε.* Diuidatur *linea α in tot partes æquales quot ſunt unitates in altero numero δ per nonam ſexti, & cõponatur altera linea, puta ζ ex tot partibus, quæ ſint æquales partibus lineæ α, quot ſunt unitates in altero numero ε. itaque linea α erit ad lineã ζ ſicut numerus δ ad numerũ ε.* Hac *ratione potes cuicunque lineæ propoſitæ, aliã dare commenſurabilem in longitudine.* Nam *ſi duæ lineæ habent proportionem inter ſe quam numerus ad numerum, ſunt inter ſe quoque longitudine commenſurabiles, per hoc theorema 6.* Quod *uerò ſequitur in exemplari græco, continet, ſubobſcurè tamen lemmà quoddam, ipſum etiam alieno loco poſitũ. inuenitur enim inter alia lemmata poſt 29 theorema huius libri, uerbis conceptis in formam problematis.*



Lemma.

Duobus numeris datis, & linea recta, oportere efficere ut numerum ad numerum: ſic quadratum lineæ datæ ad quadratum alterius.

Sint dati numeri λ, ι: *recta uerò ſit* α: *propoſitúmque ſit efficere id quod præcipitur hoc problemate. reperiatur igitur per poſtremum corollarium linea* ζ, *ad quam linea* α *ſit in ea proportione in qua numerus* λ *ad numerum* ι: *ſumatúrq; inter duas illas lineas* α, ζ *media proportionalis per tertiam decimam ſexti, ſitque* β.



Cum igitur ſit ſicut numerus λ *ad numerum* ι, *ita linea* α, *ad lineam* ζ. & *quemadmodum ſe habet linea* α *ad lineam* ζ, *ita quadratum lineæ* α *ad quadratum lineæ* β, *per ſecundum corollarium uiceſimæ ſexti. Itaque ſicut numerus* λ *ad numerum* ι, *ita quadratum lineæ* α *ad quadratum lineæ* β.

Septimum Theorema.

Incommenſurabiles magnitudines inter ſe proportionem non habent, quam numerus ad numerũ.

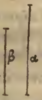
Magnitudinum non habẽtium proportionem inter ſe quã numerus ad numerum, nullum exemplum efferre poſſumus in numeris, ſicut fecimus in 5 huius. nam impoſſibile eſt numerum ad numerum nõ habere proportionem quam numerus ad numerum. Sint magnitudines incommenſurabiles α, β. *Dico* α, β *nullam omnino proportionem*

proportionem inter ſe talẽ habere, qualis inter ullos numeros reperitur. Quòd ſi contradicatur α,β habere proportionem inter ſe quam numerus ad numerum: ſequitur illud continuò, commenſurabiles quoque eſſe α,β per ſextum theorema huius libri. Sed hoc theorema ponit illas eſſe incommenſurabiles. Nullo igitur modo α habebit proportionem ad β, quam numerus ad numerum, quod demonſtrandum fuit. Hic modus argumentationis & certiſſimus eſt, & breuiſſimus: ſumitúrque ex ſyllogiſmis hypotheticis, quem à deſtructione cònſequentis uocant. Illúdque in uniuerſum uerum eſſe deprehendes, quotieſcunque in diſciplinis mathematicis aut aliis quibuſcunque, quæ nomine cenſentur ſcientiarum, reperiuntur duæ concluſiones ex earum numero, quas conuerſas uocant, quales ſunt quintum & ſextum theorema huius libri: in his potentia contineri præterea alias duas concluſiones & ipſas conuerſas, contrario tamen modo quàm ſuperiores, quales ſunt hoc theorema & proximum.



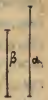
Octauum Theorema.

Si duæ magnitudines inter ſe proportionem non habent, quam numerus ad numerum, incommenſurabiles ſunt illæ magnitudines.



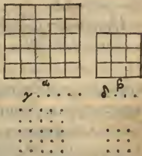
Duæ enim magnitudines α,β, inter ſe proportionem non habeant, quam numerus ad numerum. Dico incommenſurabiles eſſe magnitu-

BIBLIOTECA NAZ. ROMA VITTORIO EMANUELE



dines α,β. Quòd ſi contradicas,uidelicet cōmenſurabiles eſſe, habent ſtatim proportionem quam numerus ad numerum,per quintum theorema huius. ſed hoc theorema ſupponit eas non habere.incommenſurabiles ergo ſunt magnitudines α,β. Si igitur duæ magnitudines,&c. quod demonſtrandum fuit.

Nonum Theorema.



Quadrata quæ deſcribuntur à rectis lineis longitudine commēſurabilibus, inter ſe proportionē habent, quā numerus quadratus ad alium numerū quadratum. Et quadrata habentia proportionem inter ſe quam quadratus numerus ad numerum quadratum, habebunt quoque latera longitudine commenſurabilia. Quadrata verò quæ deſcribuntur à lineis longitudine incommenſurabilibus,proportionem non habent inter ſe quā quadratus numerus ad numerum alium quadratū. Et quadrata non habentia proportionem inter ſe quam numerus quadratus ad numerum quadratum,neque latera habebunt longitudine cōmenſurabilia.

Quia difficile uidetur hoc theorema, dignum quoque uiſum

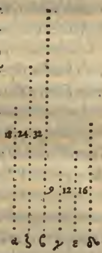
ſum eſt, quod pluribus modis demonſtraretur. Nos uerò *antequam ad demonſtrandum accedamus, nonnulla præfabimur de ſignificatione uocum ſiue terminorum huius theorematis, quæ rem totam illuſtrabũt.* Hoc ſa*ne theorema & quæ proxime ſequuntur, huiuſmodi ſunt, ut niſi plane percipiantur, res alioqui non difficillimæ inexplicabiles uideri poßint.* Imprimis illud *intelligendum eſt, lineas eſſe longitudine commenſurabiles, & lineas habere proportionem inter ſe quam numerus ad numerum, idem eſſe.* Vt *quæcunque lineæ ſunt longitudine commenſurabiles, habeant etiam proportionem inter ſe quam numerus ad numerum. & contrà, quæ lineæ habent proportionem inter ſe quam numerus ad numerum, ſint quoque longitudine commenſurabiles, ut patet ex 5. & 6. huius libri.* Similiter *illud conuertitur, lineas eſſe longitudine incommenſurabiles, & non habere proportionem quam numerus ad numerum, ut patet per 7 & 8 huius.* Itaque *intelligi debet quod dicitur in hoc theoremate, de lineis longitudine commenſurabilibus, & longitudine incõmenſurabilibus.* Sed dicat *aliquis, priuſquã* Euclides *docuit modum reperiendi lineas longitudine incommenſurabiles, tractat de quadratis ipſarum, cum tamen contrà fieri oportere uideri poßit. prius enim exquiri debet de re aliqua an ſit, quàm quid ei accidat, conſyderetur.* Nos *uerò dicimus* Euclidem *quidem tradere modum reperiendi lineas longitudine incommenſurabiles in theoremate* 11. *quod eſt in* Græco 10. *neque tamen peruerſe quicquam feciſſe.* Nam *hoc theoremate ſumit has*

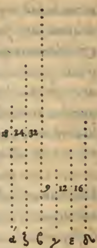
lineas longitudine incommenſurabiles ex hypotheſi, neque amplius quicquam ſibi demonſtrãdum hoc quidem loco aſſumit, quàm ex illa hypotheſi ſcilicet linearum longitudine incommenſurabilium quadrata non habere proportionem, & cætera. Quod ubi uerum eſſe demonſtrauerit, ſat feciſſe uidebitur. Ex hoc autem theoremate gradum ſibi faciet ad inueſtigationem linearum illarum in theoremate undecimo. Illud præterea intelligendum eſt quid uocibus illis ſignificetur, habere proportionem quam numerus quadratus ad numerum quadratum. Quod ut aſſequi poſsis, repetenda tibi ſunt nõnulla theoremata, eorúmque demonſtrationes ex arithmeticis ſuprà ſcriptis: atque ea maxime quæ agunt de numeris ſimilibus ſuperficialibus ex quibus eſt uiceſimumſextum octaui. Numeri ſimiles plani inter ſe proportionem habent, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. Similes uerò plani numeri ſunt (ut eſt in principijs libri ſeptimi) qui habent latera proportionalia. Latera uerò cuiuſque numeri ſunt, ex quibus inter ſe multiplicatis, ſinguli numeri producuntur. ex illo theoremate 26 octaui conſtat non ſolos numeros quadratos habere proportionem inter ſe quam numerus quadratus ad quadratum, ſed eandem etiam proportionem habere numeros omnes ſimiles ſuperficiales inter ſe. Neque uerò idem eſt numeros aliquos quadratos eſſe, & habere proportionem inter ſe quam numerus quadratus ad numerum quadratum, neque hæc inter ſe conuerti poſſunt. Quãuis enim numeri quadrati habeant proportionem quã

numerus

*numerus quadratus ad quadratum, non ideo tamē omnes habentes proportionē quam quadratus ad quadratum ſunt quadrati. Sunt enim ſimiles ſuperficiales & iidem non quadrati, qui tamen proportionē habent quam quadratus ad quadratum, quanuis omnes quadrati ſint ſimiles ſuperficiales. nam inter duos numeros quadratos incidit unus medius proportionalis, per.*11.8. *Si uerò inter duos numeros incidat unus medius proportionalis, illi duo numeri ſunt ſimiles ſuperficiales per* 20.8. D*ico præterea illud theorema* 26.8. *conuerti.* D*uo numeri habentes inter ſe proportionem quam numerus quadratus ad numerum quadratum ſunt ſimiles ſuperficiales: cuius rei illa demōſtratio afferri poteſt.*

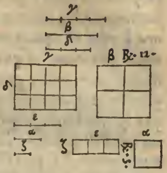
Sint duo numeri α,β habentes proportionem inter ſe quam quadratus ad quadratum. I*lli duo numeri aut ambo ſimul ſunt quadrati, aut ambo ſimul ſunt nō quadrati. (de illis autē non intelligimus hîc quicquam dicere, quorum alter eſt quadratus, alter uerò non quadratus. tales enim non poſſunt habere proportionem quā numerus quadratus ad numerum quadratum, per* 24.8. *à deſtructione conſequētis.)* E*rgo ſi ambo ſunt quadrati, ſunt etiam ſimiles ſuperficiales, ut modo concluſum eſt.* S*i non ſint quadrati, ſint illi duo quadrati γ,δ, quorum proportionem habeant α,β. quia ergo α,β habent proportionem inter*





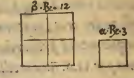
ſe quã γ, δ, & inter γ, δ incidit unus medius proportionalis puta ε, per 11. 8. *Ergo inter α, β incidet unus medius proportionalis, puta ζ per* 8.8. *Sed ſi inter duos numeros nempe α, ς unus medius incidat proportionalis, illi duo numeri ſunt ſimiles ſuperficiales, per.* 20.8. *Ergo numeri α, β ſunt ſimiles ſuperficiales.* Duo *ergo numeri habẽtes proportionẽ quã quadratus ad quadratum, ſunt ſimiles ſuperficiales.* Ex *his intelligi poteſt numeros habentes proportionem inter ſe quam quadratus ad quadratum eſſe aut quadratos, aut ſimiles planos id eſt ſuperficiales. Similes uerò ſuperficiales qui ſint, intelligitur quidem ex definitione. ſed quibus notis ſtatim agnoſci poſſint numeri propoſiti, an ſimiles ſuperficiales ſint nec ne, ſic habetote.* Primùm *ſi inter duos numeros propoſitos non incidit medius proportionalis, illi duo numeri non ſunt ſimiles ſuperficiales per* 18.8. *à deſtructione conſequentis.* Quòd *ſi incidit medius proportionalis, ſunt illi ſimiles ſuperficiales per* 20.8. Deinde *duo numeri ſimiles ſuperficiales multiplicatione alterius in alterum facta, producunt numerum quadratum, per primam* 9. Ergo *ſi non producunt quadratũ, non ſunt ſimiles ſuperficiales.* Quòd *ſi fecerint quadratũ ex multiplicatione ſui ipſius, ſunt illi ſimiles ſuperficiales per* 2.9. *Quo uerò facilius apprehendantur conſequentes demonſtrationes, & ſimul exemplum*

exemplum adducamus eorum quæ diximus. Sit *linea γ longa pedes quatuor. ſit & alia linea δ longa & ipſa pedes tres, reperiatúrque media proportionalis per 13.6. quæ media proportionalis ſit linea β.* Ergo *quadratum lineæ β erit æquale parallelogrãmo rectangulo quod ſit ex lineis γ, δ, per 17. 6.*



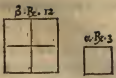
Quod quadratum continebit pedes 12, ſicut & parallelogrammum ex lineis γ, δ. Sit etiam linea ε longa pedes 3, & linea ζ longa pedem 1, media proportionalis inter lineas ε, ζ, ſit α. Quadratum lineæ α, erit pedum trium, ſicut & parallelogrammum ex lineis ε, ζ. Dico *quadratum lineæ β quod eſt 12. pedum, habere proportionem ad quadratum lineæ α, quod eſt pedum triũ, quã numerus quadratus ad numerũ quadratũ.* Nam *quemadmodũ ſe habet numerus 12. ad numerum 3, ita ſe habet quadratũ lineæ β, quod eſt 12 pedum, ad quadratũ lineæ α quod eſt 3.* Sed *numeri 12 & 3 ſunt ſimiles ſuperficiales, quia latera numeri 12 quæ ſunt 2 & 6, ſunt proportionalia lateribus numeri 3, quæ ſunt 1. & 3.* Ergo *quadratum lineæ β quod eſt 12, habebit eam proportionem ad quadratũ lineæ α, quod eſt 3, quam habet numerus ſimilis ſuperficialis ad ſimilẽ ſuperficialem.* Sed *numeri ſimiles ſuperficiales habent proportionẽ inter ſe quam numerus quadratus ad nu-*

*merum quadratum qui ſunt 4 & 1,per 26.octaui. Er-
go quadratũ lineæ β quod eſt duodecim, habebit pro-
portionem ad quadratum li-
neæ α quod eſt 3,quam nu-
merus quadratus ad qua-
dratum, eam ſcilicet quam
quaternarius ad unitatem*



quæ eſt quadrupla proportio. Nam *quadratum ma-
ius quod eſt duodecim, continet quater quadratum
minus quod eſt 3, quia latus quadrati duodecim quod
eſt linea β,eſt duplũ ad latus quadrati 3 quod eſt li-
nea α.* H*abet ergo linea β ad lineã α proportionẽ quã
numerus ad numerum.* E*rgo ſunt longitudine commen
ſurabiles per 5.huius,quæ eſt hypotheſis neceſſaria ad
concluſionẽ eius paſsionis ſiue prædicati hoc theorema-
te comprehenſi,nempe quadrata talium linearum ha-
bere proportionem inter ſe quam numerus quadratus
ad numerum quadratum.* S*ic & numerus denominãs
maiorem extremitatem proportionis lineæ β ad lineã α,
qui eſt 2. ſi in ſe ducatur reddet quadratum numerum
nempe 4. ſimiliter & numerus denominans minorem
extremitatẽ nempe 1, ſi ducatur in ſe, nihil amplius effi-
cit quàm 1. quæ unitas eſt etiam potentia quadratus nu
merus.* E*rgo quadratum lineæ β ad quadratum lineæ α
habet proportionem quam numerus quadratus ad nu-
merum quadratum, nempe quàm 4. ad 1.* E*x hoc uides
(quod modò dicebamus) non idem ſignificare numeros
aliquos quadratos eſſe, & habere proportionem inter
ſe quam numerus quadratus ad quadratũ.* N*am nu-
meros*

meros 12 & 3 quadratos nõ eſſe conſtat, cum tamẽ quadrata eos numeros continentia illam proportionem habeãt. Sed *& latus quadrati 12, quanuis numero per ſe exprimi nequeat, ut dicas latus illud eſt longũ tot pedibus, qui pedes quadrati numero 12 complent totum illud quadratum: tamen ad aliud relatum ſiue comparatum, nempe ad latus quadrati 3, quod nec ipſum per ſe numero poßis exprimere, ad latus inquam quadrati 3, proportionem duplam habet.* Nam *quadratum quadruplum ad aliud quadratum (ut quadratum lineæ β quod eſt 12, ad quadratum lineæ α quod eſt 3) habet latus ſuum duplum ad latus alterius quadrati, per illud uniuerſale corollarium 20. 6. Similes figuræ habent proportionem inter ſe ſuorum laterum relatiuorum duplicatam.* Quòd *ſi dicas latus quadrati 12 numerari poſſe, quia eius proportio quam habet ad latus quadrati 3 numeratur per binarium, cũ ſit proportio dupla: illud primùm fac cogites, non eſſe id quod dicitur per ſe numerari aliquam magnitudinẽ, ſed illius proportionem.* Magnitudo autem *illa ſcilicet latus quadrati 12 per ſe numeraretur, quãdo nulla habita ratione proportionis ipſius ad aliud, dicere poſſemus,* Quadrati *continẽtis pedes quadratos 12, latus eſt longum tot pedibus, quorum numerus in ſe ductus efficeret numerum illum 12. ſed hoc fieri non poteſt, quia 12 non eſt numerus quadratus.* Sic *itaq; dices*: Quatenus *quadrãtum illud 12 per ſe conſyderatur, nulla habita*

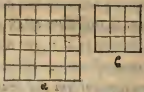


*ratione proportionis ad aliud,ſed tantum ut eſt 12 pedum,non habet quidem latus per ſe numerabile,ſed ſi conferatur ad aliud,puta ad quadratum 3 pedum, tũc dices,latus quadrati 12 eſt 2. latus uerò quadrati 3 eſt 1.ſed hæc eſt denominatio ipſius proportionis quæ dupla dicitur.quæ proportio non poteſt eſſe aut conſyderari in paucioribus terminis quàm duobus, cum ſit relatio ad aliud,hoc eſt in prædicamento ad aliquid.*Itaque *binarius non eſt numerus pedum talium quales 12 ſunt in ipſo quadrato.* Deinde *ſi binarius eſſet latus quadrati 12,ut dicas illud latus eſſe duo , ex multiplicatione duorum in ſe, non efficeretur illud quadratum 12,ſed quadratum aliud quod eſſet 4 pedum,quemadmodum ex binario numero in ſe ductò fit quadratus numerus quaternarius.*Sed *nec ſi dicas illud latus quadrati 12 numerari alio ullo numero,duxeriſq; numerum illum in ſeipſum,unquam efficitur duodenarius numerus.*Cũ *tamen omnes numeri denominantes latus cuiuſcunque quadrati multiplicatione ſui ipſius,illum ipſum numerum efficiant denominantem quadratum, cuius latera denominant,puta 2,multiplicatione ſui in ſeipſum reddit 4.ternarius reddit 9. quaternarius reddit 16.& ſimiliter cæteri omnes.*Non *igitur idem eſt aliquas magnitudines habere inter ſe proportionem quam numerus ad numerum,& numerari per ſe ſingulas ex illis nulla ratione habita proportionis,ut hìc latus quadrati 12 per ſe quidem numerari nullo modo poteſt ſed comparatum ad aliam magnitudinem,puta ad latus quadrati 3,numeratur illius proportio.*Sic *& latus ipſius*

quadrati

quadrati; & cæterarum omnium figurarũ quas geometræ quadratas uocant, quarum areæ tamen per numeros quadratos non deſignantur. Q*uod uerò dicimus, manifeſtum eſt ex uerbis ipſius* Euclidis *in theorematibus* 5, 6, 7, & 8 *huius libri, cum ubique dicat commenſurabiles & incommenſurabiles magnitudines non quidem per ſe numerari; ſed habere aut non habere proportionem quam numerus ad numerum.* Q*uæ res non bene animaduerſa uidetur pleriſq; cauſſam erroris attuliſſe, ut ex ſequentibus planum fiet.* Nunc *uerò qui aggreſsi ſunt demonſtrationem huius theorematis magis particularem aliquam demonſtrationem nonnullis uideri poſſent attuliſſe, quàm uniuerſalem.* Et *ſane non deeſſe arbitror qui illorum dicta ſecus intelligant, cum exiſtiment ab eis ſuppoſitas eſſe lineas quaſdam non tam longitudine commenſurabiles, quales in theoremate ſupponuntur eſſe, quàm numero certo ſingillatim numerabiles.* Itaque *non intelligentes, illud de demonſtrationibus illorum dicere potuerunt: cũ ea ratione credidiſſent à ſe concluſum illud uniuerſale quod eſt in hoc theoremate* Euclidis, Q*uadrata deſcripta ex lineis longitudine commenſurabilibus habere proportionẽ inter ſe, quàm numerus quadratus ad numerum quadratum: illud particulare tantum concluſerunt,* Q*uadrata deſcripta ex lineis numero certo per ſe numerabilibus habere proportionem &c.* Q*uod tamen aliter eſt, & demonſtrationes illorum recta ſunt, & propoſito theoremati conuenientes.* T*antum pictura figurarum quas græcus codex habet, poſſet ambi-*

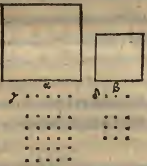
guitatis aliquid afferre. Nam ita pinguntur quadrata, & deſcribuntur certis areolis, ut earũ numerus quadrato numero denominetur.

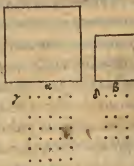


Ex quo uideri poſſet lineas α, ϐ, quæ deſcribunt ipſa quadrata, oportere eſſe numero aliquo per ſe numerabiles, ut linea α ſit pedum 5, & linea ϐ pedum 3, ueluti pictura ipſa refert hic. Quod tamen non ſupponit Euclides, *ſed unum illud ſupponit & requirit eas eſſe longitudine cõmenſurabiles, ut in ſuperiori exẽplo de quadratis duobus, quorum alterum ſpatium totum eſt 12, alterũ uerò eſt 3.* Nam *quanuis latera ipſorum non ſint numero aliquo certo per ſe numerabilia, ſunt tamen ipſa eadem longitudine cõmẽſurabilia.* Præterea *hæc pictura quadratorum α, ϐ per areolas diſtinctorum illum errorem efficere poſſet, ut quis exiſtimet idem eſſe numeros duos quadratos eſſe, & habere proportionem quam quadratus numerus ad quadratum numerũ. nam numerus areolarum in quadrato α, eſt numerus quadratus, nempe 25 productus ex radice 5, quæ eſt longitudo ipſius lineæ α.* Similiter *numerus areolarum quadrati ϐ eſt quadratus, nempe 9, & ipſe productus ex ſuo latere 3, longitudine inquã ipſius lineæ ϐ.* Nos *uerò nuper oſtẽdimus aliud eſſe numeros quadratos dici, & habere proportionem quam numerus quadratus ad numerum quadratum.* Itaque *quantũ ad illas areolas attinet contentas maiore quadrato lineæ α, quæ ſunt numero 25, exprimunt numerum illum quadratum 25, qui effici-*

tur

tur ex numero 5 in ſe ducto. qui numerus 5 eſt maior extremitas proportionis inter 5 & 3, quæ eſt proportio linearum α,β. Hæc autē proportio, nempe numeri 5 ad 3 facit ut lineæ ipſæ α,β ſint inter ſe longitudine commenſurabiles per 6 huius. Idem dices de minoris quadrati areolis. Neque neceſſe eſt intelligere illas areolas quadratas eſſe aut pedes aut paſſus quadratos conficiētes ipſa quadrata, quanuis tales eſſe poſſunt, ſi modò latera ipſorum quadratorū ſint tot pedibus longa, nempe 5 aut 3. Omnino tamen neceſſe eſt numeros ambos exprimentes numerum pedum aut paſſuum quadratorū ipſis quadratis comprehenſorū eſſe ſimul aut quadratos, ut in his figuris quadratis linearum α,ϐ: aut ambos eſſe ſimiles ſuperficiales, ut in ſuperioribus quadratis quæ erant 12, et 3. de quibus numeris conſtat ex antedictis eos eſſe ſimiles ſuperficiales, itáq; habere proportionem quam numerus quadratus ad numerum quadratum. Itaq; potes pingenda tibi proponere ipſa quadrata linearum α,β, ut nullam diſtinctionem areolarum in ſe recipiāt, ſintq; quadrata ſingula plane uacua, ſolisque quatuor lineis æqualibus cōtēta. quod ut intelligatur, demonſtrationes ipſas explicabimus. Sint duæ lineæ α, β longitudine commēſurabiles. Dico quadratū lineæ α ad quadratum lineæ β habere proportionē quā quadratus numerus ad quadra-

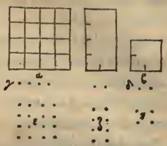




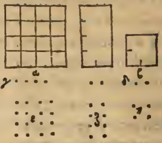
tum numerum. Cum enim commenſurabilis ſit longitudine linea α lineæ β. Ergo α ad β habet proportionẽ quã numerus ad numerum, per 5. huius. habeat itaque proportionem quã numerus γ ad δ. Cũ igitur ſit quemadmodum linea α ad β, ita γ numerus ad δ numerum: cumq́; proportio quadrati quidem lineæ α ad quadratum lineæ β ſit proportio cõtinens duplicatam proportionem lineæ α ad lineam β, (ſimiles enim figuræ ſunt in duplicata proportione ſuorum laterum relatiuorum, per primum corollariũ 20. 6.) itidem cum proportio numeri quadrati, qui producitur à radice γ, ad quadratum numerum productum à radice δ ſit proportio duplicata numeri γ, ad numerũ δ per ſecundam partem 11. 8: *cũmque unius & eiuſdẽ proportionis, puta quæ eſt lineæ α ad lineam β, uel numeri γ ad numerum δ, proportiones æque multiplices, nempe quadrati lineæ α ad quadratum lineæ β, & numeri quadrati producti à radice γ ad numerum quadratum productum à radice δ, ſint inter ſe æquales: eſt igitur ſicut quadratum lineæ α ad quadratum lineæ β, ita numerus quadratus productus à radice γ, ad numerum quadratum productum à radice δ.*

Aliter.

Sint α, β lineæ rectæ longitudine commenſurabiles. Dico quadratum deſcriptum ab α ad quadratum deſcriptũ ad



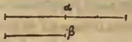
ad β habere proportionē quā numerus quadratus ad alium numerum quadratum. Quia enim linea α eſt longitudine cō menſurabilis lineæ β, habent inter ſe proportionē quam numerus ad numerum, per quintū theorema huius libri. Habeant itaque proportionem eam quā numerus γ ad numerum δ, & numerus γ ſe ipſe multiplicans efficiat numerū ε. idem porrò numerus γ multiplicans numerum δ reddat numerum ζ. numerus uerò δ ex ſui ipſius multiplicatione producat numerum η. Cū igitur γ ex ſui ipſius multiplicatione reddiderit numerum ε: multiplicatus etiam per δ effecerit numerum ζ: eſt ergo ut numerus γ ad numerum δ, id eſt linea α ad lineam β, ſic numerus ε ad numerum ζ per ſeptimamdecimam ſeptimi. Sed quemadmodum ſe habet linea α ad lineam β, ſic ſe habet quadratū lineæ α ad parallelogrammum deſcriptum ex linea α in lineam β ducta per primam ſexti. Quemadmodum igitur quadratū lineæ α ad parallelogrammum ex α, β, ſic numerus ε ad numerum ζ. Rurſus quia numerus δ ex ſui ipſius multiplicatione reddidit numerum η, multiplicatus uerò idē δ in γ produxit numerum ζ: eſt igitur quemadmodum γ ad δ hoc eſt quemadmodum linea α ad lineam β, ſic numerus ζ ad numerum η per eandem ſeptimam decimam ſeptimi. Sed quemadmodum linea α ad lineā β,



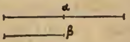
ita parallelogrãmũ ex lineis α, β, ad quadratũ lineæ β per primã ſexti. Eſt igitur ſicut parallelogrãmũ ex lineis α, β ad quadratum lineæ β, ita numerus ζ ad numerum κ.

Sed modò cõcluſum eſt ſicut ſe habebat quadratum lineæ α ad parallelogrammum ex α, β, ita ſe habere numerum ι ad numerum ζ. Per æquam igitur proportionem erit quemadmodum quadratum lineæ α ad quadratum lineæ β, ſic numerus ι ad numerum κ. Vterque uerò illorum numerorũ eſt quadratus. Nam ι productus eſt ex multiplicatione γ in ſeipſum: κ uerò ex multiplicatione δ ſui etiam ipſius in ſeipſum. Ergo quadratum lineæ α ad quadratũ lineæ β habet proportionem quam numerus quadratus ad quadratum numerum. quod primo loco demonſtrandũ erat. Priore demonſtrationis modo uſi ſunt Theon & Campanus, poſteriore etiam Theon aut quis alius. Ex his duabus nobis ſimplicior uidetur illa quam priore loco retulimus. Vacua itaque pingi poſſunt quadrata quæ deſcribuntur à lineis longitudine commenſurabilibus, modò conſtet tales eſſe ſuppoſitiones, quales accipiuntur in theoremate, lineas ſcilicet eſſe longitudine commenſurabiles. tunc enim in uniuerſum illud uerum erit, quotquot pedes aut paſſus quadrati fuerint in illis figuris quadratis, ſemper numerabuntur à numeris habentibus

proportionem inter ſe quã quadratus numerus ad numerum. Sed quia perobſcurus hic locus totus uideri ſolet, non alienum exiſtimauimus noſtram quoque demonſtrationẽ apponere, ſi forte iuuare poſſimus, quod cupimus quidem, & certe confidimus. Sint lineæ duæ longitudine commenſurabiles α, β. dico quadrata earũ &c. Cum enim lineæ α, β ſint longitudine commenſurabiles, habebunt proportionem inter ſe quam numerus ad numerum per 5. huius. habeat igitur α ad β proportionẽ duplam, quæ



eſt quam habet numerus ad numerũ, puta 4 ad 2, & 6 ad 3, & plerique alij: reperiantúrque minimi numeri tres continuè proportionales in proportione dupla per 2. 8, ſintq́; illi 4, 2, 1. ergo per corollarium eiuſdem 2. 8, numeri 4 & 1 erunt quadrati. Nam ſicut 4 eſt quadratus ex 2 in ſe multiplicato productus, ita 1 eſt etiam numerus quadratus. fit enim ex eadem unitate in ſeipſam multiplicata. Dico præterea hos numeros quadratos illos eſſe, quorum proportionem habent inter ſe quadrata linearum α, β. Nam ſicut numerus 4 ad numerum 2, ita ſe habet linea α, ad lineam β. Vtrobiq; enim eſt dupla proportio per ſuppoſitionem. Sed quemadmodum ſe habet linea α ad lineam β, ita ſe habet quadratum lineæ α ad parallelogrammum, quod fit ex ductu lineæ α in lineam β, per primam ſexti. Ergo ſicut ſe habet numerus 4 ad 2, ita ſe habebit quadratum lineæ α ad parallelogrammum productum ex α & β. Itidem ſicut ſe habet numerus 2 ad 1, ita ſe habet linea α ad li-



*neam β. utrobiq; enim etiã eſt dupla proportio per ſuppoſitionẽ. Sed quemadmodum ſe habet linea α ad lineam β, ita ſe habebit parallelogrammum productum ex α & β ad quadratum lineæ β per eandem primam ſexti.*Ergo *ſicut ſe habet numerus 2 ad 1, ita ſe habebit parallelogrammum productum ex α & β ad quadratum lineæ β.*Ergo *per definitionẽ æquæ proportionalitatis, & per 22.5 erit quadratum lineæ α ad quadratum lineæ β, ſicut numerus 4 ad 1. qui quadrati ſunt.* Illud *ergo uerum eſt uniuerſaliter, Quadrata deſcripta ex lineis longitudine commẽſurabilibus, habere proportionẽ inter ſe quam quadratus numerus ad quadratum numerum, quẽcunque numerum areolarum ſiue ſpatiorum intra ſe capiant illa quadrata: ſemper tamen neceſſe erit numeros ab illis contentos eſſe aut quadratos: aut ſi quadrati non erũt, (neque enim ſemper neceſſe eſt tales eſſe) ſimiles ſaltem ſuperficiales eſſe omnino neceſſe eſt.* Porrò *ſecundæ partis huius theorematis quæ eſt conuerſa prioris illa eſt demonſtratio.* Sit *quadratũ lineæ α ad quadratum lineæ β, ſicut quadratus numerus productus à γ ad quadratum productũ ex δ.*Dico *lineas α, β eſſe longitudine commenſurabiles.* Nam *proportio quadrati α ad quadratum β eſt duplicata proportio lineæ α ad lineam β. per 20.6.*Similiter *proportio numeri quadrati producti ex γ ad quadratum productum ex δ eſt duplicata proportio ipſius numeri γ ad numerum δ, per 11.8.*Igitur *per 15.5, quemadmodum linea α ad lineã β,*

ſic

ſic numerus γ ad numerum δ. Commenſurabilis eſt ergo longitudine linea α lineæ β per 6 huius libri. Ter-*tiam uerò partem theorematis demonſtrare non eſt difficile per ſecundum ſyllogiſmum hypotheticum, quem à deſtructione conſequentis uocant.* Sit *linea α incommẽſurabilis longitudine lineæ β: quadratũ lineæ α ad quadratum lineæ β non habebit proportionem quam numerus quadratus ad numerum quadratum.* Nam *ſi cõtradicatur, ſequitur ſtatim per ſecũdam partem huius theorematis, illa quadrata habere latera longitudine commenſurabilia, quod eſt contrarium his quæ ſuppoſita ſunt.* Sic *enim eſſent lineæ α, β, & commenſurabiles & incommẽſurabiles longitudine, quod eſt impoßibile. Simili ratione poſtrema pars huius theorematis demonſtratur.* Nam *ſi quadrata inter ſe proportionẽ non habent quam quadratus numerus ad quadratum, neque latera habebunt longitudine commenſurabilia.* Si *contradicatur, continuo ſequitur per primam partem huius theorematis, illa quadrata habere proportionem inter ſe quam quadratus numerus ad numerum quadratum, quod eſt contrarium ſuppoſitioni.*

Corollarium.

Ex *quibus ita demonſtratis, manifeſtũ illud eſt, lineas longitudine commenſurabiles, omnino potentia quoq; cõmenſurabiles eſſe. Quæ uerò ſunt potentia commenſurabiles, non omnino longitudine quoque commenſurabiles eſſe.* Et *quæ longitudine incommenſurabiles ſunt, non omnino potentia etiam incommenſurabiles eſſe. Quæ uerò potentia incommenſurabiles ſunt, omnino*

longitudine quoque incommenſurabiles eſſe. Cum enim quadrata linearum longitudine commenſurabiliũ proportionem eam inter ſe habeant, quam quadratus numerus ad quadratum numerum: ea uerò quæ proportionem habeant quadrati numeri ad quadratum numerum, ſimpliciter etiam habeãt proportionem quam numerus ad numerum. Et quæ proportionẽ habent quã numerus ad numerum, ſint commẽſurabilia per 6 huius. Sequitur omnino lineas longitudine commenſurabiles non tantùm eſſe longitudine commenſurabiles, ſed etiã eſſe potentia. Huius probatio pendet ex prima parte theorematis. Rurſus quia quadrata quædam ſunt quæ non habẽt proportionem eam inter ſe quam quadratus numerus ad quadratum numerum, habẽtia tamẽ ipſa proportionem eam ſimpliciter quam numerus ad numerum, latera quidem eorum ſunt potẽtia commenſurabilia, quia deſcribunt quadrata habẽtia proportionem quam numerus ſimpliciter ad numerum, itáque commenſurabilia per 6 huius: latera uerò ipſa inter ſe ſunt longitudine incommenſurabilia, per poſtremam partem theorematis. Verum eſt igitur lineas potentia commenſurabiles nõ ſtatim eſſe longitudine etiã commenſurabiles. Hac eadẽ ratione probatur & illud tertium corollarij membrum, lineas longitudine incõmenſurabiles non ſtatim etiam eſſe potentia incommenſurabiles. Poſſunt enim eſſe longitudine quidem incommenſurabiles, potentia tamen commenſurabiles, ut in quadratis quæ habent quidem proportionem inter ſe quam numerus ad numerum, ſed non quam numerus

quadratus

quadratus ad numerum quadratum. Quartum uero probatur per ſecundum ſyllogiſmum hypotheticum à deſtructione conſequentis, lineas potentia incommenſurabiles, longitudine quoque incommenſurabiles eſſe. Nam ſi dicas eas eſſe longitudine commenſurabiles, ſequitur eſſe ipſas quoque potentia cõmenſurabiles, quod eſt contra ſuppoſitionem. Nam poſitæ ſunt incommenſurabiles longitudine. Reſolutio autẽ eius demonſtrationis quam attulimus illa eſt. Omnia quadrata habentia proportionem inter ſe quam extremi trium numerorum minimorum ſuæ proportionis continuæ proportionalium, habẽt proportionẽ quam numerus quadratus ad numerum quadratum. Sed quadrata duarũ linearum longitudine commenſurabilium ſunt huiuſmodi. Ergo quadrata duarum linearũ longitudine commenſurabilium habent proportionem quam numerus quadratus ad quadratum numerum. Maior patet ex corollario 2.8. Minor patet ex 22.5.

Lemma.

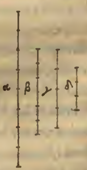
Demonſtratum eſt in arithmeticis theoremate 26.8 ſimiles planos numeros habere proportionem inter ſe quã numerus quadratus ad numerum quadratũ. Conuerſum uerò theorema numeros habentes proportionẽ inter ſe quam numerus quadratus ad numerũ quadratum eſſe ſimiles planos ſuperficiales, non quidẽ demonſtratur in libris arithmeticis, ſed eſt à nobis in præcedẽti theoremate libri huius demonſtratum. Vnde manifeſtum eſt numeros qui non ſunt ſimiles plani ſuperficiales, id eſt non habẽtes latera inter ſe proportionalia, nõ

habere etiam proportionem quam numerus quadratus ad numerum quadratum. Eam enim proportionē ſi inter ſe haberent, ſequeretur ſimul eos eſſe ſimiles ſuperficiales. cuius contrarium eſt poſitum, eos inquam non eſſe ſimiles planos. Ergo *numeri non ſimiles ſuperficiales non habent inter ſe proportionem eam quam quadratus numerus ad quadratum numerum.*

Antequam attingamus theorema quod eſt decimo loco poſitum in hoc libro, illud omnino faciēdum eſt, ut ei præponamus illud quod uulgo proximum locum tenet, ſcilicet undecimum. Aliter enim ſi fecerimus, demonſtratio illius theorematis quod decimo loco ſcribi diximus, non procederet à priori, ut patebit in explicatione illius. Itáque Campanus fieri oportere recte indicauit, dum ſitum utriuſque theorematis inuerteret.

Decimum Theorema.

Si quatuor magnitudines fuerint proportionales, prima uerò ſecundæ fuerit commenſurabilis, tertia quoque quartæ commenſurabilis erit. Quòd ſi prima ſecūdæ fuerit incommēſurabilis, tettia quoq; quartæ incommenſurabilis erit.



Sint quatuor magnitudines proportionales α, β, γ, δ. ut α ad β, ſic γ ad δ. Sitq́; *α commenſurabilis magnitudini β, dico etiam γ eſſe commenſurabilem magnitudini δ. Cum enim α ſit commenſurabilis β,* Ergo *α habebit proportionem*

nem ad β quam numerus ad numerum, per 5 huius. *Sed ex ſuppoſitione eſt ſicut α ad β, ſic γ ad δ.* Ergo *γ ad δ habebit etiam proportionem quam numerus ad numerum.* Ergo *commenſurabilis erit magnitudo γ magnitudini δ per 6 huius.* Rurſus *ſit α incommenſurabilis magnitudini β, dico etiam γ eſſe incommenſurabilem δ.* Cum enim *α ſit incommenſurabile β, igitur α non habebit proportionem ad β, quam numerus ad numerum per 7 huius.* Eſt *autem ſicut α ad β, ita γ ad δ.* *Ergo neque γ ad δ proportionem habebit quam numerus ad numerum.* Incommenſurabilis *eſt igitur γ magnitudini δ per 8 huius.* Si *itaque quatuor magnitudines & cætera.*

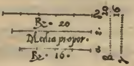
Corollarium.

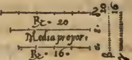
Si fuerint quatuor lineæ proportionales, fuerintque duæ priores, aut duæ poſteriores inter ſe cõmenſurabiles potentia tantum, cæteræ quoque duæ erunt potentia tantum cõmenſurabiles. hoc probatur per 22.6, & per hoc theorema 10. quo corollario utitur demonſtrator in ſequentibus theorematibus 28.29. & alijs.

Vndecimum Theorema.

Propoſitæ lineæ rectæ (quam ῥητὴν uocari diximus) reperire duas lineas rectas incommenſurabiles, hanc quidẽ longitudine tantum, illam uerò non longitudine tantum, ſed etiam potentia incommenſurabilem.

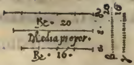
Sit linea recta propoſita α, reperiendæ ſunt duæ lineæ incommenſurabiles lineæ α, alia qui-





dem longitudine tantùm, alia uerò etiam potentia incommē ſurabilis. Afferantur numeri duo β, γ inter ſe rationem eam non habentes quā quadratus numerus ad quadratum numerum, hoc eſt, ne ſint illi numeri ſimiles plani: fiatq́ue ſicut numerus β ad numerum γ, ita quadratum lineæ α ad quadratum alterius lineæ quæ ſit δ. Quomodo uerò id fiat, didicimus per lemma illud poſitum in theoremate 6 huius libri. Commenſurabile *eſt igitur quadratū lineæ α, quadrato lineæ δ per 6 huius libri.* Et *quia numerus β ad numerum γ non habet eam proportionem quam numerus quadratus ad numerum quadratum: neque etiam quadratum lineæ α ad quadratū lineæ δ habebit eam proportionem quam numerus quadratus ad numerū quadratum.*Ergo *linea α erit incommenſurabilis longitudine tantum lineæ δ per 9 huius libri.* Sic *itaq; reperta eſt prior linea, nempe δ incommenſurabilis longitudine tantum lineæ propoſitæ quæ eſt α.* R*urſus reperiatur media proportionalis inter α, δ quæ ſit ι per 13. 6.*E*ſt itaque ſicut linea α ad lineam δ, ita quadratū lineæ α ad quadratum lineæ ι per ſecundum corollarium 20.6.* S*ed linea α eſt incommenſurabilis longitudine lineæ δ, ut modò concluſum eſt.*Ergo *quadratum etiam lineæ α erit incommenſurabile quadrato lineæ ι, per ſecundam partem poſtremi theorematis.*Nec *te impediat quod illud theorema* 10 *loquatur de magnitudinibus cōmenſurabilibus & incōmenſurabilibus.* Lineæ *enim quando conſyderantur earum lōgitudines, ut ſint longitudine*

gitudine cõmenſurabiles aut incommẽſurabiles lineæ, magnitudinis uoce comprehenduntur, & contrà, ſi conſyderantur ut magnitudines, ut ſint magnitudines commenſurabiles ſiue incommenſurabiles, de longitudinibus ipſarum linearum loqui intelligimus. neque tum quicquam de potentia lineæ intelligimus. Nam magnitudo lineæ eſt ipſa longitudo, cum linea nihil aliud ſit quàm longitudo ſine latitudine. De quadratis uerò nihil eſt neceſſe ita loqui, quia magnitudo ipſius quadrati eſt ipſum quadratum: potentia enim quadrati non dicitur. Cum ergo quadratũ lineæ α ſit incommenſurabile quadrato lineæ ι, erit igitur per definitionem linearum incommenſurabiliũ linea α incommẽſurabilis potentia lineæ ι. Ergo lineæ rectæ propoſitæ ueluti α quam ῥητὴν diximus, & ex qua menſuras cæterarum linearum accipi oportere dicebamus inter principia huius libri, reperta eſt linea λ longitudine tantum incommenſurabilis. Eſt itaque ea linea λ ῥητὴ ſiue rationalis, longitudine tantum incommenſurabilis, ſupple lineæ α quæ primò & ex ſuppoſitione rationalis eſt. Reperta eſt item linea ι eidem lineæ α incommenſurabilis non longitudine tantum, ſed etiam potentia. quæ linea ι per definitionem linearum incommenſurabilium lineæ rationali erit irrationalis. Nam in uniuerſum ſolet Euclides *eas uocare* ἀλόγους *id eſt irrationales, quæ & longitudine & potentia ſint incommenſurabiles lineæ propoſitæ, & ex ſuppoſitione* ῥητῇ *id eſt rationali.* Hoc *au-*



tem problema licet in theorema conuertere, quomodo diximus cætera conuerti poſſe.

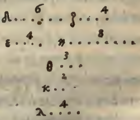
Duodecimum Theorema.

Magnitudines quæ eidem magnitudini ſunt commenſurabiles, inter ſe quoq; ſunt cõmẽſurabiles.

Vtraque magnitudo α, β ſit commenſurabilis magnitudini γ. Dico magnitudines etiam α, β eſſe inter ſe commenſurabiles. Nam cum *α ſit commenſurabilis magnitudini γ. igitur α ad γ habebit proportionem quam numerus ad numerum habeat proportionem quam numerus δ ad numerum ε. Rurſus cum β ſit commenſurabilis γ, igitur γ ad β habebit proportionẽ quam numerus ad numerum. habeat itaque quam numerus ζ ad numerum η. Sumantur minimi numeri continuati in proportionibus datis ſecundum 4.8. qui numeri ſint θ, κ, λ. ut quæ ſit proportio numeri δ ad numerum ε, eadẽ ſit numeri θ ad numerum κ: quæ uerò proportio ſit numeri ζ ad numerum η, eadẽ ſit numeri κ ad numerũ λ.* Cum igitur *ſit ſicut α ad γ, ita δ ad ε: ſitq́; δ ad ε ſicut θ ad κ: eſt itaq; ut α ad γ, ſic numerus θ ad numerũ κ. Itẽ cũ ſit ut γ ad β, ſic ζ ad η: ſitq́; ſicut ζ ad η, ita κ ad λ.* Ergo *ſicut γ ad β, ita κ ad λ. ſed modò probatũ eſt, ſicut erat α ad γ, ita θ ad κ. Per æquã igitur proportionẽ*



α γ β



α, γ, β.
θ, κ, λ.

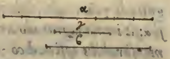
X

ſicut

ſicut α ad β, ita numerus θ ad numerum λ. Ergo per 6 huius libri, magnitudo α erit commenſurabilis magnitudini β. ergo magnitudines quæ eidem ſunt commenſurabiles & cætera.

Decimumtertium Theorema.

Si ex duabus magnitudinibus hæc quidem commenſurabilis ſit tertiæ magnitudini, illa uerò eidem incommenſurabilis, incõmenſurabiles ſunt illæ duæ magnitudines.



Sint duæ magnitudines α, β. porrò ſit tertia magnitudo γ: ſitq́; α commenſurabilis ipſi γ: ſit etiam β incommenſurabilis eidem γ. dico magnitudinem α eſſe incommenſurabilem ipſi β Nam ſi α eſſet commenſurabilis ipſi β, cum ſit α commenſurabilis ipſi γ: ipſa quoque magnitudo β eſſet commenſurabilis magnitudini γ, per 12. cuius poſitum eſt contrarium.

Decimumquartum Theorema.

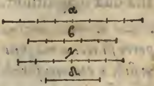
Si duarum magnitudinum cõmenſurabilium altera fuerit incõmenſurabilis magnitudini alteri cuipiam tertiæ, reliqua quoque magnitudo eidem tertiæ incõmenſurabilis erit.



Sint duæ magnitudines commẽſurabiles α, β: altera uero ipſarum, nempe α alteri cuipiã quæ γ ſit, incommenſurabilis eſto. dico reliquam quoque magnitudinem β eſſe incommen-

ſurabilem ipſi γ. *Nam ſi* β *eſſet commenſurabilis* γ, *cum etiam* α *ſit commenſurabilis* β: *ipſa quoque magnitudo* α *magnitudini* γ *erit commenſurabilis, per præcedens theorema. Sed poſitum eſt eas eſſe incommenſurabiles: quod eſt factu impoßibile.* Non *ergo erit commenſurabilis* β *ipſi* γ. *ergo incommēſurabilis. Si duarum ergo magnitudinum &c.* Corollarium.

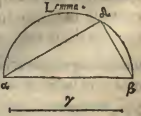
Quæ ſunt commenſurabilia incommēſurabilibus, ſunt inter ſe incommenſurabilia. Sint magnitudines, α, β *incommēſurabiles: ſit & magnitudo* γ *cōmenſurabilis ipſi* α: *ſit item magnitudo* δ *cōmenſurabilis ipſi* β. *dico* γ, δ *eſſe inter ſe incommenſurabiles.*



Nam α, γ *ſunt commenſurabiles, ex quibus* α *eſt incommenſurabilis ipſi* β. Ergo *per hoc theorema* 14. γ, β *ſunt incommenſurabiles. Sed* β, δ *ſunt commenſurabiles. ergo per hoc ipſum theorema, aut per* 13, γ, δ *ſunt inter ſe incommenſurabiles. hoc autē corollario ſæpe utitur* Theon, *ut in* 23, 27, 38, *& alijs.*

Lemma.

Duabus datis rectis lineis inæqualibus, inuenire id, quanto plus poteſt maior q̄ minor. Sint datæ duæ inæquales rectæ α β, *&* γ, *quarum maior ſit* α β, *inueniēdū eſt quanto plus poſſit linea* α β, *quàm* γ. *Deſcribatur ſuper lineā* α β *ſemicirculus* α δ β, *& intra eum uſque*



ad

ad ipſius ſemicirculi circunferentiam collocetur linea recta α δ æqualis ipſi γ per primam quarti, & cõiungãtur puncta δ, β linea ducta, quæ ſit δ β. Cõſtat ſane angulum α δ β rectum eſſe per 31.3. præterea lineam α β poſſe plus quàm linea α δ, quæ eſt æqualis ipſi γ: tantóque plus poſſe quantum eſt quadratum lineæ δ β, per 47.1. Similiter quoq; duabus datis rectis, linea utrãque potens reperietur hac ratione. Sint duæ datæ recta α δ, δ β, inueniendáq; proponatur linea quæ utrãque poſsit. applicentur inter ſe eo ſitu quo angulum rectum conficiãt, qui ſit α δ β, & ducatur linea à puncto α in punctum β. conſtat item lineam α β eſſe eam quam quærimus potentẽ quantũ illæ ambæ α δ, δ β, per 47.1.

Decimumquintum Theorema.

Si quatuor rectæ proportionales fuerint, poſsit autem prima pluſquam ſecunda tanto quãtum eſt quadratum lineæ ſibi commenſurabilis longitudine: tertia quoque poterit pluſquam quarta tanto quantum eſt quadratum lineæ ſibi commenſurabilis longitudine. Quòd ſi prima poſsit pluſquam ſecunda quadrato lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis: tertia quoque poterit pluſquam quarta quadrato lineæ ſibi incommenſurabilis longitudine.

Sint quatuor lineæ rectæ proportionales α, ϐ, γ, δ: ſicut α ad ϐ, ita γ ad δ. poſsit autem α pluſquam ϐ tanto quãtum eſt quadratum lineæ ε: poſsitq; γ pluſquam δ quadrato lineæ ζ. Dico ſi α fuerit commenſurabilis longitudine li-



neæ ε, erit etiam γ commenſurabilis longitudine lineæ ζ. ſin autem α incommenſurabilis longitudine fuerit lineæ ε, erit ſimiliter γ incommenſurabilis longitudine lineæ ζ. Ex eo enim quod eſt ſicut α ad β, ita γ ad δ: erit etiam ut quadratū lineæ α ad quadratum lineæ β, ita quadratum lineæ γ ad quadratum lineæ δ per 22,6. Sed ex ſuppoſitione quadrato lineæ α æqualia ſunt quadrata linearum β, ε: quadrato uerò lineæ γ æqualia ſunt quadrata linearū δ, ζ. Eſt igitur ſicut proportio quadratorum earum linearum β, ε ad quadratū lineæ β: ita proportio quadratorum duarum linearum δ ζ, ad quadratum lineæ δ. Per diſiunctā igitur proportionalitatem ſicut quadratum lineæ ε ad quadratū lineæ β; ita quadratum lineæ ζ ad quadratum lineæ δ.

Eſt itaque ueluti ε ad β, ſic ζ ad δ, per ſecundam partē 22.6. Per cōtrariam ergo proportionem, ſicut β ad ε, ita δ ad ζ. Erat autem ex ſuppoſitione ſicut α ad β, ita γ ad δ. Per æquam igitur proportionem eſt ut α ad ε, ita γ ad ζ. Itaque per decimam huius, ſi α eſt commenſurabilis longitudine ipſi ε, erit quoque γ commenſurabilis longitudine ipſi ζ. Si uerò incommenſurabilis fuerit α ipſi ε, erit ſimiliter incommenſurabilis γ ipſi ζ Ergo ſi quatuor rectæ proportionales &c.

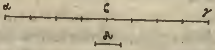
α, β, ε.
γ, δ, ζ.

Decimumſextum Theorema.

Si duæ magnitudines commenſurabiles componātur, tota magnitudo compoſita ſingulis partibus commenſurabilis

commenſurabilis erit. Quòd ſi tota magnitudo compoſita alterutri parti commenſurabilis fuerit, illæ duæ quoque partes commenſurabiles erunt.

Componantur duæ magnitudines commenſurabiles α β, β γ. Dico totam magnitudinem α γ ſingulis partibus α β, β γ cõmenſurabilem eſſe.



Cum enim α β & β γ ſint commẽſurabiles, metietur ipſas quadam magnitudo cõmunis ambarum menſura. Metiatur igitur, ſitq́; δ. Cum itaq; δ metiatur α β: β γ metietur quoque totam magnitudinem compoſitam α γ per communem cõceptionẽ. Quæcunque magnitudo metitur duas alias, metitur quoque compoſitam ex illis. Sed eadem δ metiebatur α β, β γ ex ſuppoſitione. Ergo δ metitur α β, β γ, & α γ. Commenſurabilis eſt itaque α γ utriq; magnitudini α β, & β γ. Sit præterea α γ tota compoſita commenſurabilis alteri ex duabus α β, β γ: ſitq́; illa α β. Dico duas illas α β, β γ eſſe commenſurabiles. Nam cum α γ & α β ſint commenſurabiles, metiatur ipſas communis quædam menſura: ſit autem illa magnitudo δ. Cum itaq; δ metiatur α β & α γ, reliquam quoque magnitudinem β γ metietur magnitudo δ per illam communem conceptionem. Quicquid metitur totũ, & detractum metitur & reliquũ. ſed eadem δ metiebatur magnitudinem α β ex ſuppoſitione. Ergo δ metitur utranque α β, & β γ. Commenſurabiles itaque ſunt α β, β γ. itaq; ambæ partes theore-

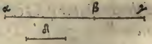
matis ueræ. *Corollarium.*

Si tota magnitudo fuerit commenſurabilis alteri ex duabus magnitudinibus totam magnitudinem componentibus, erit etiam & reliqua ex duabus commẽſurabilis. Nam ſi tota magnitudo ueluti α γ *eſt commenſurabilis magnitudini* β γ, *ergo per ſecundam partem huius theorematis* 16, *magnitudines* α β, β γ *ſunt commenſurabiles. ergo per priorem partem eiuſdem theorematis magnitudo* α γ *erit cõmenſurabilis ſingulis* α β, β γ. Hoc *corollario utitur* Theon *in demonſtratione* 18, & *aliorũ theorematum. omiſſum tamen eſt* Euclidi, *quia facile uidebatur ut cætera ferè corollaria.*

Decimumſeptimum Theorema.

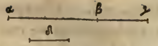
Si duæ magnitudines incommenſurabiles componantur, ipſa quoq; tota magnitudo ſingulis partibus componentibus incommenſurabilis erit. Quòd ſi tota alteri parti incommẽſurabilis fuerit, illæ quoque primæ magnitudines inter ſe incommenſurabiles erunt.

Componantur enim duæ magnitudines incommenſurabiles α β, β γ. *Dico totã magnitudinem* α γ, *utricunq; magnitudini* α β, β γ *incõmenſurabilem fore.*



Quòd ſi negetur incommenſurabiles eſſe γ α, α β, *metietur ipſas quædam magnitudo. metiatur itaque, ea quæ ſit* δ *ſi fieri poteſt. Cum igitur* δ *metiatur per te* γ α, α β, *metietur ſimiliter reliquã magnitudinem* β γ: *ſed per te eadẽ* δ *metiebatur* γ α. Ergo

α β,



α β, β γ ſunt commenſurabiles. Sed ex ſuppoſitione erāt incōmenſurabiles: fieri ergo nō poteſt ut γ α, α β ſint cōmenſurabiles: ſunt itaq; incōmenſurabiles. Eadem uia demonſtrari poteſt magnitudines α γ, γ β eſſe incommenſurabiles. Ergo α γ ſingulis magnitudinibus α β, β γ eſt incommenſurabilis.

Rurſus α γ alteri magnitudini, nempe ipſi α ε, ſit incō menſurabilis. dico etiam α β, β γ eſſe incommenſurabiles. Nam ſi commēſurabiles fuerint, metietur ipſas magnitudo quædam. metiatur, ſitq; δ. Cum igitur δ metiatur α β, β γ, metietur quoque totam magnitudinem α γ. ſed per te δ metiebatur α β: ergo δ metietur γ α, α ε. Cōmenſurabiles itaq; ſunt γ α, α β. Sed ex ſuppoſitione erant incommenſurabiles. illud autem fieri nullo modo poſſe certum eſt, ut ſimul ſint & commenſurabiles & incommenſurabiles. Nulla ergo magnitudo metietur α β, β γ. Ergo incommenſurabiles ſunt α β, β γ. Eadem quoque uia demonſtrari poteſt illud idem, ſi poſuerimus magnitudinem α γ eſſe incommenſurabilem ipſi β γ. Ergo ſi duæ magnitudines incommenſurabiles &c.

Corollarium.

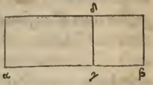
Si tota magnitudo fuerit incōmenſurabilis alteri ex duabus magnitudinibus totam magnitudinem componentibus, erit etiam & reliquæ ex duabus incommēſurabilis. Nam ſi tota magnitudo ueluti α γ eſt incommenſurabilis magnitudini β γ, ergo per ſecundam partem huius theorematis 17. magnitudines α β, β γ ſunt incom-

menſurabiles.ergo per priorem partem eiuſdẽ theorematis magnitudo α γ erit incommenſurabilis ſingulis α β, β γ.hoc corollario utitur Theon *in demonſtratione 73 theorematis,& aliorum.*

Lemma.

Si *parallelogrammum applicetur ſecundum lineam rectam,lineáque illa tanto plus excedat parallelogrammi latus, quantum eſt alterum latus ipſius parallelogrammi: illud parallelogrammũ ſic applicatum, eſt æquale alteri parallelogrammo,quod fit ex ſectionibus lineæ,quæ factæ ſunt per applicationem ipſius parallelogrammi ſecundum lineam illam.*

Hoc *per ſe manifeſtum uideri poteſt,tamen quia reperitur inter cætera,demonſtrationem eius afferemus. Secũdum lineam rectam α β applicetur parallelogrammum α δ,cuius alterũ latus ſit æquale illi portioni lineæ rectæ,quæ excurrit extra parallelogrammũ.*

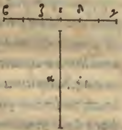


*Dico parallelogrammũ α δ eſſe æquale ſuperficiei rectangulæ quæ fit ex α γ,γ β.quod per ſe patet,ut modò diximus.*Nam *quia quadratum eſt δ β,linea δ γ eſt æqualis lineæ β γ: eſtq́; parallelogrammum α δ,id quod eſt ſuperficies rectangula α γ,γ β.* Ergo *ſi parallelogrammum applicetur &c.*

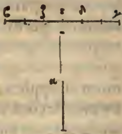
Decimumoctauum Theorema.

Si fuerint duæ rectæ lineæ inæquales, & quartæ parti quadrati quod deſcribitur à minore,æquale

le parallelogrammum applicetur ſecundùm maiorem, ex qua maiore tantum excurrat extra latus parallelogrammi, quantum eſt alterum latus ipſius parallelogrãmi. Si præterea parallelogrammum ſui applicatione diuidat lineã illam in partes inter ſe cõmenſurabiles longitudine: illa maior linea tanto plus poteſt quàm minor, quantũ eſt quadratum lineæ ſibi commenſurabilis longitudine. Quòd ſi maior plus poſſit quàm minor, tanto quantum eſt quadratum lineæ ſibi cõmẽſurabilis longitudine: & præterea quartæ parti quadrati lineæ minoris æquale parallelogrammum applicetur ſecundũ maiorem, ex qua maiore tantum excurrat extra latus parallelogrammi, quantum eſt alterum latus ipſius parallelogrammi, parallelogrammum ſui applicatione diuidit maiorem in partes inter ſe longitudine cõmenſurabiles.



Sint duæ rectæ inæquales α, β γ, quarum maior ſit β γ. Quartæ autem parti quadrati lineæ minoris α, hoc eſt ipſi quadrato quod deſcribitur à dimidia linea α, æquale parallelogrammum ſecundum lineã β γ, applicetur, quod relinquat ex linea β γ partem excurrentem æqualem alteri lateri ipſius parallelogrãmi: ſitq́; illud parallelogrammũ quod fiat ex β δ, δ γ: (hoc uerò quemadmodũ fiat, docet Campanus in fine demonſtrationis 13.) ſit quoque commen-



ſurabilis longitudine linea β δ ipſi lineæ δ γ. Dico lineã β γ plus poſſe quàm linea α, tanto quantum eſt quadratum lineæ cuiuſdã ſibi ipſi lineæ, dico β γ, longitudine cõmenſurabilis. Secetur enim linea β γ in duas partes æquales in puncto ε, ponatúrque lineam ε ζ æqualem eſſe lineæ δ ε: reliqua ergo linea δ γ erit æqualis lineæ β ζ. Cumq; linea recta β γ diuiſa ſit in partes æquales in puncto ε, in partes autem inæquales in puncto δ, ſuperficies rectangula contenta ex β δ, δ γ cum quadrato lineæ ε δ, æqualis eſt quadrato lineæ ε γ, per quintum theorema ſecundi libri. Itaque ſuperficies rectangula contenta ex β δ, δ γ quater ſumpta cũ quadrato lineæ ε δ item quater ſumpto, eſt æqualis quadrato lineæ ε γ quater ſumpto. Nam æqualia quæ ſunt æqualiter multiplicata, ſimul æqualia ſunt. Sed ſuperficiei rectangulæ contentæ ex β δ, δ γ quater ſumptæ æquale eſt quadratũ lineæ α ex ſuppoſitione. Nam parallelogrammum ex β δ, δ γ poſitum eſt æquale quartæ parti quadrati lineæ α. Quadrato uerò lineæ δ ε quater ſumpto æquale eſt quadratum lineæ δ ζ. Nam linea δ ζ eſt dupla ad lineam δ ε. quadrato autem lineæ ε γ quater ſumpto æquale eſt quadratũ lineæ β γ. Similiter enim linea β γ dupla eſt ad lineam ε γ. Ergo quadrata linearũ α, δ ζ ſunt æqualia quadrato lineæ β γ. Quocirca quadratum lineæ β γ maius eſt quàm quadratum lineæ α tanto quantum eſt quadratum lineæ δ ζ. Ergo maior linea β γ plus poteſt quàm

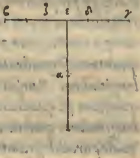
minor α quadrato lineæ δ ζ. Nunc autem demonſtrandum eſt lineam ς γ eſſe longitudine commenſurabilem ipſi lineæ δ ζ. Cum enim ex ſuppoſitione linea ς δ ſit longitudine commẽſurabilis ipſi δ γ: ergo linea tota ς γ erit longitudine commenſurabilis lineæ δ γ, per ſextum decimum theorema huius libri. Atqui linea δ γ eſt æqualis lineæ ς ζ. Ergo linea tota ς γ eſt commenſurabilis longitudine lineis ς ζ, γ δ. Componantur illæ duæ lineæ ut unam lineam efficiant. Cum itaque linea tota β γ ſit cõmenſurabilis lõgitudine duabus lineis unius loco ſumptis ς ζ, γ δ. Ergo lineæ β ζ, γ δ unius loco ſumptæ ſunt cõmenſurabiles longitudine ipſi lineæ ζ δ, per ſecundam partẽ ſextidecimi theorematis huius libri. Quare etiã reſiduæ lineæ ζ δ commenſurabilis longitudine erit tota linea ς ɼ, per priorem partem eiuſdem ſextidecimi theorematis. hoc ipſum tamen probari poteſt per corollariũ à nobis poſitum poſt 16. Ergo linea β γ plus poteſt quàm linea α quadrato lineæ ſibi commenſurabilis longitudine. Rurſus linea β γ plus poßit quàm linea α tanto quantum eſt quadratum lineæ ſibi longitudine commẽſurabilis: quartæ autem parti quadrati lineæ α æquale ſecundum lineam β ɼ parallelogrammum applicetur, quod relinquat ex linea β γ portionem æqualem alteri ipſius lateri: ſitq́; ſuperficies rectangula contẽta ex β δ, δ ɼ, demonſtrandum eſt lineas ς δ, δ ɼ eſſe inter ſe longitudine commenſurabiles. Manentibus conſtructionibus & ſuppoſitionibus præcedentibus ſimiliter demonſtrabimus lineam ς γ plus poſſe linea α tanto quantum eſt quadratum lineæ ζ δ. Sed ex ſuppoſitione linea β γ plus

poteſt quàm linea α, tanto quantum eſt quadratum lineæ ſibi commenſurabilis longitudine. Commenſurabilis eſt itaque longitudine linea β γ lineæ ζ δ. Ergo linea compoſita ex duabus β ζ, δ γ eſt commenſurabilis longitudine lineæ ζ δ, per ſecundã partem ſextidecimi theorematis huius libri. Quocirca per 12 huius, ſiue per priorem partem ſextidecimi theorematis, linea β γ eſt cõmenſurabilis longitudine lineæ compoſitæ ex β ζ, δ γ. Sed tota linea compoſita ex β ζ, δ γ eſt commenſurabilis longitudine ipſi δ γ. nam β ζ eſt æqualis ex antè dictis ipſi δ γ. Ergo linea β γ eſt longitudine commenſurabilis ipſi δ γ, per 12 huius. Quare & linea β δ eſt longitudine commenſurabilis lineæ δ γ, per ſecundam partem ſextidecimi theorematis. Ergo ſi fuerint duæ rectæ lineæ inæquales &c. Quod demonſtrandum erat.

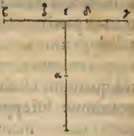
Decimumnonum Theorema.

Si fuerint duæ rectæ inæquales, quartæ aute mp arti quadrati lineę minoris æquale parallelogrammum ſecundum lineam maiorem applicetur, ex qua linea tantum excurrat extra latus parallelogrammi, quantum eſt alterum latus eiuſdem parallelogrammi: ſi parallelogrammum præterea ſui applicatione diuidat lineam in partes inter ſe longitudine incommẽſurabiles, maior illa linea tanto plus poteſt quàm minor, quantũ eſt quadratum lineæ ſibi maiori incõmenſurabilis longitudine. Quòd ſi maior linea tanto plus poſsit quàm minor, quantum eſt quadratum lineæ incommenſurabilis

commenſurabilis ſibi longitudine: & præterea quartæ parti quadrati lineæ minoris æquale parallelogrammum applicetur ſecundum maiorẽ, ex qua tantum excurrat extra latus parallelogrãmi, quantum eſt alterum latus ipſius, parallelogrammum ſui applicatione diuidit maiorem in partes inter ſe incommenſurabiles longitudine.

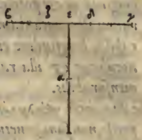


Sint duæ rectæ inæquales α, β γ, quarũ maior ſit β γ: quartæ autẽ parti quadrati minoris nempe α, æquale parallelogrammũ applicetur ſecundum lineã β γ, quod relinquat ex linea β γ partem excurrentem æqualem alteri lateri ipſius parallelogrammi: ſitq́; illud parallelogrammum ex β δ, δ γ: incommenſurabilis autem longitudine ſit β δ ipſi δ γ. Dico *lineam β γ poſſe plus quàm linea α tanto, quantum eſt quadratum lineæ incommenſurabilis ſibi longitudine. Sint primum eædem conſtructiones & ratiocinãdi uiæ, quæ in proximo theoremate. Similiter oſtendemus lineã β γ poſſe plus quàm linea α tanto, quantum eſt quadratum lineæ δ ζ.* Reſtat *ut demonſtremus lineam β γ eſſe incommenſurabilem longitudine ipſi δ ζ.* Cum enim *linea β δ ſit incommenſurabilis longitudine lineæ δ γ ex ſuppoſitione, incommenſurabilis etiam longitudine erit linea β γ ipſi lineæ δ γ, per 17 huius: ſed δ γ eſt commenſurabilis ambabus lineis β ζ, δ γ ſimul compoſitis, quia δ γ eſt*



æqualis ipſi εζ. Ergo εγ eſt incommenſurabilis ambabus βζ, δγ ſimul compoſitis, per 14 huius. Ergo per ſecundam partem ſeptimidecimi theorematis huius libri linea compoſita ex εζ, δγ ſimul & unius loco ſumptis eſt incommẽſurabilis lineæ ζδ. Ergo per priorem partẽ eiuſdẽ ſeptimidecimi theorematis linea βγ eſt incommenſurabilis longitudine lineæ ζδ. Linea igitur βγ poteſt plus quàm linea α tanto quantum eſt quadratum lineæ incommenſurabilis ſibi longitudine. Rurſus linea βγ poſſit plus linea α tanto quantum eſt quadratum lineæ incommenſurabilis ſibi longitudine: quartæ autem parti quadrati lineæ α æquale parallelogrammum applicetur ſecũdum lineam βγ, quod relinquat excurrentem portionem lineæ βγ æqualem alteri ipſius lateri: ſitq́; illud parallelogrammum ex lineis βδ, δγ. Demonſtrandum nobis eſt illud lineam βδ, eſſe incommenſurabilem longitudine lineæ δγ. Maneant enim eædem conſtructiones & ratiocinandi uiæ: ſimiliter etiam oſtendemus lineam βγ poſſe plus quàm linea α quadrato lineæ ζδ. Primùm ex ſuppoſitione linea βγ poteſt pluſquam linea α tanto quantum eſt quadratum lineæ ſibi incommenſurabilis longitudine. Ergo linea βγ erit incommenſurabilis longitudine lineæ ζδ. Itaque linea compoſita ex εζ, δγ & unius loco ſumpta erit incommenſurabilis longitudine lineæ ζδ, per ſecundam partem ſeptimidecimi theorematis

matis



matis libri huius: Quare & per primam partẽ eiuſdẽ theorematis, linea β γ erit incommẽſurabilis longitudine lineæ compoſitæ ex β ζ, α γ. Sed linea cõpoſita ex β ζ, α γ eſt commenſurabilis longitudine lineæ α γ, eò quia β ζ eſt æqualis ipſi α γ ex anteprobatis. Itaque linea β γ eſt incommenſurabilis longitudine ipſi α γ per 14 huius. Ergo per ſecundã partem eiuſdem ſeptimidecimi theorematis, linea β α eſt incommenſurabilis longitudine lineæ α γ. Quamobrem ſi fuerint duæ rectæ inæquales &c.

Lemma.

Cum ſit demonſtratum lineas longitudine commenſurabiles omnino potentia quoque commenſurabiles eſſe; eas uerò quæ potentia ſunt commenſurabiles non omnino longitudine quoque commenſurabiles eſſe, ſed eſſe poſſe & longitudine commenſurabiles & incommenſurabiles, conſtat ſi lineæ propoſitæ (quam ῥητὴν *uocari diximus, eandémque rationalẽ à recentioribus) linea quædam fuerit commenſurabilis longitudine, illam uocari debere rationalem, & commenſurabilem non longitudine ſolum, ſed etiam potentia. Nam lineæ longitudine commenſurabiles, omnino potentia quoque commenſurabiles ſunt. Quod ſi propoſitæ lineæ, quam rationalem uocant, quædam fuerit linea commenſurabilis potẽtia: ſiquidem & longitudine etiam cõmenſurabilis ipſi fuerit, uocabitur illa rationalis, & commenſurabilis ipſi*

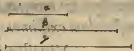
longitudine & potẽtia. Si uerò ipſi lineæ propoſitæ, quã rationalem uocant, linea quædam potentia commenſurabilis, longitudine eidem fuerit incommenſurabilis: uocabitur & illa rationalis, potentia tantum commenſurabilis.

Illæ duæ uoces πεὸκλω χέλιοι quæ ſunt in exemplari impreſſo, non ſunt in uetuſto: & quod ſequitur, continuata ſerie ſcribitur, addita particula γὰρ hoc modo, ῥητῆς γὰρ, ſic itaque dicemus. Rationales enim uocat Euclides *(ut eſt in principijs huius libri) illas lineas quæ ſunt lineæ propoſitæ quam ῥητὴν uocat, ſiue longitudine & potentia commenſurabiles, ſiue potentia tantum.* Sunt *tamen & aliæ lineæ rectæ longitudine quidem incommenſurabiles lineæ propoſitæ, id eſt τῇ ῥητῇ, ſiue dicas rationali, potentia tantum eidem commenſurabiles, eoq; uocantur rationales & cõmenſurabiles inter ſe ea ratione qua ſunt rationales. ſed & illæ eadem poſſunt eſſe cõmenſurabiles inter ſe ſiue longitudine, & ideo potentia quoque, ſiue potentia tantum.* Et *quidẽ ſi fuerint inter ſe commenſurabiles longitudine, uocabuntur & ipſæ rationales longitudine commenſurabiles, ut tamen ſimul intelligatur potentia quoque cõmenſurabiles eſſe.* Q*uòd ſi potentia tantum inter ſe fuerint commenſurabiles, uocabuntur & ipſæ rationales potentia tantum commenſurabiles.*

Corollarium.

Quod autem lineæ duæ ſiue plures rationales & commẽſurabiles longitudine ipſi rationali ſint inter ſe commẽſurabiles longitudine, hinc cõſtat. Nam *cum ſint rationales & longitudine commenſurabiles ipſi primo rationali,*

tionali, eæ autem magnitudines quæ ſunt uni & eidem commenſurabiles ſint inter ſe commenſurabiles, per 12 huius. Ergo *lineæ rationales ipſi primo rationali longitudine commenſurabiles, ſunt inter ſe quoque commenſurabiles longitudine.* Sed *quantū ad eas attinet, quæ ſunt rationales potentia tantum commenſurabiles ipſi primo rationali, fieri omnino neceſſe eſt ut illæ quoque inter ſe ſint potentia ſaltem cōmenſurabiles.* Cum *enim quadrata earum ſint rationalia, erunt commenſurabilia quadrato lineæ propoſitæ quæ dicitur primo rationalis.* Itaque *per 12 huius ipſa quoque inter ſe erunt cōmenſurabilia.* Ergo *lineæ eorum ſunt inter ſe potentia ſaltem commenſurabiles.* Sed *nihil uetat eaſdē eſſe præterea longitudine inter ſe commenſurabiles.* Sit *enim linea α rationalis, ſitq; linea β eidem lineæ α rationali potentia tantum commenſurabilis,*



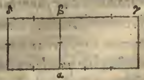
hoc eſt longitudine incommenſurabilis eidē. ſit præterea alia linea γ lineæ β longitudine commenſurabilis (hoc enim eſſe poſſe conſtat ex principijs huius libri) per 14 huius, linea γ eſt incommenſurabilis longitudine ipſi lineæ α: ſed quadratum lineæ α eſt commenſurabile quadrato lineæ β ex ſuppoſitione: quadratum item lineæ γ eſt commenſurabile eidem quadrato lineæ β, per ſuppoſitionem. Ergo *per 12 huius, quadratum lineæ γ eſt commenſurabile quadrato lineæ α.* Ergo *linea γ erit per definitionem rationalis, potentia tantum commenſurabilis ipſi lineæ α, ſicut & ipſa linea β.* Dantur *ergo duæ rationales potentia tantum commenſurabiles ipſi ra-*

tionali,inter ſe uerò longitudine commenſurabiles. Hic obiter repetendũ eſſe puto,quod antea diximus in diffinitione linearũ rationalium, Campanũ, cæteróſq; deinceps ab eo latinos geometras inuexiſſe illas uoces ſiue terminos,ut quaſdam lineas uocarent rationales potentia tantum,quaſdã uerò longitudine & potentia,quibus nunquam Euclidem uſum eſſe reperies.hæ enim uoces longitudine & potentia nunquã referuntur ad rationalitatem aut irrationalitatem,ſed ſemper ad commenſurabilitatem,aut incommenſurabilitatem linearum. Quæ peruerſiones ſolent rerum per ſe difficilium etiam difficultatem & obſcuritatem augere.Itaque te monitum iterum atque iterum uelim,ut principiorum id eſt ſimplicium terminorum ſimplicem uim diligenter intelligas & retineas,neque quicquam externum admiſcendum exiſtimes.

Vigeſimum Theorema.

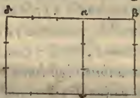
Superficies rectangula contenta ex lineis rectis rationalibus longitudine commenſurabilibus ſecundum unum aliquem modum ex antedictis, rationalis eſt.

Nam ex lineis α β,β γ rationalibus longitudine commẽſurabilibus ſecundum unũ aliquem modum ex antedictis cõtineatur ſuperficies rectãgula quæ ſit α γ.dico ſuperficiem α γ eſſe rationalẽ. Deſcribatur enim à linea α β quadratum α δ:rationale eſt itaque



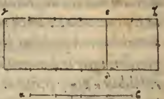
itaque quadratum illud α δ ex definitione. Cúnque ſit *commenſurabilis longitudine linea α β lineæ β γ, æqualisq́; ſit linea α β lineæ β δ, commenſurabilis itaque longitudine erit linea β δ lineæ β γ.* Eſt autē ſicut linea ε δ *ad lineam ε γ, ita quadratum δ α ad ſuperficiē rectangulam α γ, per primam ſexti. Sed modo concluſum eſt lineam β δ eſſe commenſurabilem lineæ β γ.* Ergo per de*cimam huius libri quadratum δ α eſt commenſurabile ſuperficiei rectangulæ α γ.* Sed *quadratum δ α eſt rationale: itaque per definitionem ſuperficies α γ erit etiā rationalis.* Ergo *ſuperficies rectangula cōtenta & cætera.*

Sed & *alia quadam deſcriptione placet idem demōſtrare.* Prior *enim demonſtratio quadratum minoris lineæ cōſcripſit, nunc mutato caſu demonſtrationis quadratum maioris deſcribamus.* Sit *ſuperficies rectangula β γ contenta ex lineis rationalibus inæqualibus longitudine inter ſe commenſurabilibus α β, α γ: ſitque maior α γ.* Deſcribatur *ex linea*



α γ quadratum δ γ. dico parallelogrammum γ ε rationale eſſe. Nam *linea α γ eſt commenſurabilis longitudine lineæ α β ex ſuppoſitione: ſed linea δ α eſt æqualis lineæ α γ.* Ergo *linea δ α eſt commenſurabilis longitudine lineæ α β: ſed quam proportionem habet δ α ad α β, eandem habet quadratum δ γ ad parallelogrammum γ β, per primam ſexti.* Ergo *per* 10 *huius libri commenſurabile eſt quadratum δ γ parallelogrāmo γ β.* Quadratum *autem δ γ rationale eſſe conſtat, quia eſt qua-*

dratum lineæ rationalis, nempe α γ. Itaque per definitionem, parallelogrammum etiam γ β erit rationale. Præterea cum demonſtrationes illæ uideantur loqui de eo parallelogrammo quod ſit ex duabus lineis, quarum altera ſit ea propoſita quam primo loco rationalem diximus, unde diximus menſuras cæterarũ linearum ad illam comparatarum capi oportere, altera uerò ſit eidẽ primo rationali commenſurabilis longitudine, quæ eſt prima ſpecies linearum rationalium longitudine commenſurabilium, alium caſum afferendum puto de altera ſpecie, linearum inquam rationalium longitudine commenſurabilium, ut demonſtremus generalem huius theorematis ueritatem, neq; fruſtra in eo poſitum illud extitiſſe ſecundum unum aliquem modum ex antedictis. Sit itaque linea primo rationalis α β: ſit etiam parallelogrammum γ δ contentum ex lineis γ ε, ε δ rationalibus id eſt lineæ primo rationali α β commenſurabilibus longitudine.

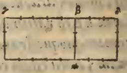


Sint tamen illæ duæ lineæ γ ε, ε δ diuerſæ & inæquales lineæ primo rationali α β. Dico parallelogrammũ γ δ eſſe rationale. Deſcribatur quadratum lineæ ε δ, ſitq; δ ζ. Primum conſtat lineas γ ε, ε δ eſſe inter ſe commenſurabiles longitudine per 12 huius. Nam poſitum eſt utrãque eſſe longitudine commenſurabilem ipſi α β. Sed ε δ eſt æqualis lineæ ε ζ. Ergo linea γ ε erit commenſurabilis longitudine lineæ ε ζ. Sed quẽadmodum ſe habet linea γ ε ad lineã ε ζ, ita ſe habet parallelogrammum

rallelogrammum γ δ ad quadratũ δ ζ, per primã ſexti. Ergo per decimam huius parallelogrammum γ δ erit commenſurabile quadrato δ ζ. Sed quadratum δ ζ eſt commenſurabile quadrato lineæ α β, quia linea ι δ poſita eſt cõmenſurabilis longitudine lineæ α β, quæ eſt primo rationalis. Ergo per 12 huius, parallelogrammũ γ δ eſt commenſurabile quadrato lineæ α β. Sed quadratũ lineæ α β eſt rationale per definitionem. Ergo per definitionem quoque figurarum rationalium parallelogrammum γ δ erit etiam rationale.. Nunc reſtat alius caſus tertiæ ſpeciei, linearum inquam rationalium longitudine commenſurabilium, quæ ſunt ipſi quidem lineæ primo rationali α β commenſurabiles potentia tantum, itaque rationales tamen. inter ſe uerò longitudine commenſurabiles ſint ipſæ lineæ γ ι, ι δ, maneat itaque eadẽ conſtructio quæ in proximo caſu modo lineæ γ ι, ι δ ſint rationales potentia tantum commenſurabiles ipſi α β: inter ſe uerò ſint longitudine etiam commenſurabiles. Dico ſic quoque parallelogrammum γ δ eſſe rationale. Primo probabitur, ſicut modo dictum eſt parallelogrãmum γ δ eſſe commẽſurabile quadrato δ ζ: ſed quadratum lineæ α β eſt commenſurabile quadrato δ ζ. Ergo per 12 huius parallelogrammum γ δ erit commenſurabile quadrato lineæ α β. ſed quadratũ lineæ α β eſt rationale. Ergo per definitionem parallelogrammum γ δ erit etiam rationale. Hunc autem caſum notandum tibi memineris. Quum enim uentum erit ad 26 theorema, ad illius theorematis demonſtrationem & intelligentiam illum tibi uſui fore intelliges.

Vigeſimumprimum Theorema.

Si rationale ſecundum lineam rationalem applicetur, habebit alterum latus lineam rationalem & commenſurabilem longitudine lineæ, cui rationale parallelogrammum applicatur.

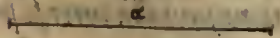


Hoc theorema eſt ueluti ἀντίστροφον præcedentis. Rationale enim parallelogrammum α γ applicetur ſecundum lineam α β rationalē uno aliquo modo ex antedictis, ſiue ſit illa primo rationalis, ſiue alia ipſi primo rationali commenſurabilis, idq́; longitudine & potentia, uel potentia tātum. his enim tribus modis dicitur linea rationalis. Dico lineam β γ eſſe rationalem & longitudine commenſurabilem ipſi lineæ α β. Deſcribatur enim quadratum lineæ α β quod ſit α δ. Rationale eſt igitur quadratum α δ, ſed & parallelogrammum α γ eſt rationale per poſitionem. Ergo per definitionem rationaliū quæ in ſe conuertitur, ſiue per 12 huius, commenſurabile eſt quadratum α δ parallelogrammo α γ. Eſt autem ſicut quadratum α δ ad parallelogrammū α γ, ita linea δ ε ad lineam ε γ, per primam ſexti. Itaq; per decimam huius, linea δ β erit commenſurabilis lineæ β γ. ſed linea ε δ, eſt æqualis lineæ β α, commenſurabilis eſt ergo linea α β, lineæ β γ. Rationalis autem eſt linea α β, Rationalis ergo erit & linea β γ, & commenſurabilis longitudine lineæ α β. Ergo ſi rationale ſecundum lineā rationalem &c.

Lemma.

Linea

Linea potens ſuperficiem irrationalem, eſt irrationalis. Lemma *Poßit enim linea α ſuperficiem irrationalem, hoc eſt quadratum quod ab α deſcribitur, æquale eſto areæ irrationali: dico lineam α eſſe irrationalem. Nam ſi linea α eſſet rationalis, rationale quoque eſſet quadratum ab illa deſcriptum: (ſic enim eſt poſitũ inter definitiones) ſed ex poſitione eſt irrationale; irrationalis eſt ergo linea α. quod demonſtrandum erat.*

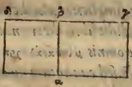


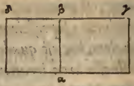
Hic inſeritur quoddam ſcholium, quod lemmatis inſcriptionem habet, ſed illud nihil aliud eſt quàm demõſtratio quædam ſequentis theorematis.

Vigeſimumſecundum Theorema.

Superficies rectangula contenta duabus lineis rectis rationalibus potẽtia tantum cõmenſurabilibus, irrationalis eſt. Linea autem quæ illam ſuperficiem poteſt, irrationalis & ipſa eſt: uocetur uerò medialis.

Superficies enim rectãgula αγ comprehendatur à duabus lineis rationalibus potentia tantum commẽſurabilibus, quæ ſint αβ, βγ. Dico ſuperficiem illam eſſe irrationalem, & lineam quæ illam poteſt, irrationalem etiam eſſe: uocetur autem medialis. Deſcribatur enim à linea αβ quadratum αδ. rationale eſt itaq; quadratum αδ. Et quoniam incommẽſurabilis eſt longitudine linea αβ



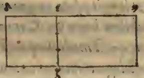


lineæ β γ (nam ex ſuppoſitione ſunt illæ inter ſe potentia tantum commenſurabiles) æqualiſq́; eſt linea α β, lineæ ε δ. incommenſurabilis longitudine ergo erit linea δ ε lineæ ε γ. Eſt *autem ſicut linea δ ε ad lineã β γ, ita quadratum α δ ad parallelogrammum α γ, per primam ſexti. incommenſurabile: eſt ergo quadratum α δ parallelogrammo α γ per ſecundã partem decimi theorematis huius libri.* Sed *quadratũ δ α eſt rationale: irrationale eſt ergo parallelogrammum α γ.* Quare *& linea quæ illud parallelogrammũ α γ, hoc eſt ea quæ quadratum ipſi parallelogrammo æquale deſcribit, irrationalis erit per lemma poſtremum.* Vocetur *autem medialis eá ratione, quia quadratum quod ab ea deſcribitur, æquale eſt parallelogrammo quod comprehenditur à lineis α ε, β γ, itaque media ipſa proportionaliter intercidit inter illas lineas α ε, β γ per 17.6. quod demonſtrandum erat.* Hæc *autem μέση de qua hoc libro agitur, ſimpliciter μέση dicitur: illa uero cuius inuentionem tradidit lib. 6. theoremate 13. dicitur μέση ἀνάλογον.* Neque *omnis μέση ἀνάλογον eſt potens ſuperficiem irrationalẽ, ſed ea tantum quæ eſt media proportionalis inter duas lineas potentia tantum commenſurabiles.* Campanus *in propoſitione apud eum 19 addidit, dicitúrque ſuperficies medialis: quod tamẽ non eſt ita intelligendũ, ut omnis ſuperficies medialis contineatur ex duabus lineis rationalibus potentia tantum commẽſurabilibus.*

hoc enim refellitur per ſequētia theoremata 26. & 29. ubi ſuperficies medialis cōtineri dicitur ex duabus medialibus potentia tantum commenſurabilibus. Itaque *ſuperficies omnis rectāgula duabus rectis rationalibus potentia tantum commenſurabilibus comprehēſa, medialis dicitur, ſed non econuerſo, ut omnis medialis ſuperficies rectangula ſit comprehenſa duabus rectis rationalibus potentia tantum commēſurabilibus. eſt enim & medialis comprehenſa duabus medialibus potentia tantum commenſurabilibus. ſed tamen in uniuerſum ſuperficies quam poteſt linea medialis eſt & ipſa medialis.*

Lemma.

Si *ſint duæ lineæ rectæ, erit ſicut prior ad ſecundā, ita quadratum quod à priori deſcribitur, ad parallelogrammum quod comprehenditur duabus illis rectis.* Hoc Lemma *nihil aliud affert quàm quod theorema primū libri ſexti. Sint duæ rectæ* ζι, ικ. *Dico ſicut eſt linea* ζι *ad lineam* ικ, *ita quadratū lineæ* ζι *ad parallelogrammum comprehenſum ex* ζι, ικ. *Deſcribatur enim quadratū lineæ* ιζ, *ſitq́;* λζ, & *compleatur parallelogrammum* κζ.

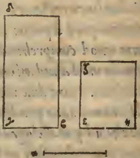


Cum igitur linea λι *ſit æqualis lineæ* ιζ: *ſit autem ſicut linea* λι *ad lineam* ικ, *ita quadratum* λζ *ad parallelogrammum* ζκ *per 1.6. Ergo ſicut linea* ιζ *ad lineam* ικ, *ita quadratum* λζ *ad parallelogrammum* ζκ. *Eſt autem quadratum* λζ, *quadratum lineæ* ιζ, *parallelogrammum uero* ζκ *id quod comprehenditur dua-*

bus lineis ε ζ, η κ. Eſt ergo ſicut linea ε ζ ad lineam η κ, ita quadratum linea ε ζ ad parallelogrammum comprehenſum lineis duabus ζ ε, η κ. Et econuerſo ſicut parallelogrammũ comprehenſum duabus lineis κ η, ε ζ ad quadratum lineæ ε ζ, ita linea κ η ad lineam ε ζ.

Vigeſimumtertium Theorema.

Quadrati lineæ medialis applicati ſecundum lineã rationalem, alterum latus eſt linea rationalis & incommenſurabilis longitudine lineæ ſecũdum quam a pplicatur.



Sit linea medialis α, rationalis uerò ſit γ β: & quadrato lineæ α parallelogrammũ rectangulum æquale β δ applicetur ſecundum lineam β γ, cuius alterũ latus ſit γ δ. Dico lineam γ δ eſſe rationalem & longitudine incommenſurabilem lineæ β γ. Cum enim linea α ſit medialis, poteſt parallelogrammum contentum ex lineis rationalibus potentia tantum commenſurabilibus. poſsit itaque parallelogrammum rectangulum η ζ: ſed ex ſuppoſitione poteſt etiam parallelogrummum β δ. æquale eſt igitur parallelogrammum β δ parallelogrammo η ζ. Sed & ambo parallelogramma ſunt æqualium angulorum, quia ſunt rectangula. Aequalium uerò & æquiangulorum parallelogrammorũ latera quæ ſunt circa æquales angulos

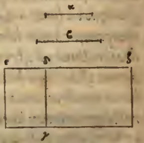
gulos reciprocam inter ſe proportionem habent per 14 ſexti. proportionaliter ergo erit ſicut linea ϐγ ad lineā εκ, ita linea εζ ad lineam γδ. Eſt igitur ſicut quadratū lineæ βγ ad quadratum lineæ εκ, ita quadratum lineæ εζ ad quadratum lineæ γδ, per 22 ſexti. ſed quadratū lineæ ϐγ eſt commēſurabile quadrato lineæ εκ: eſt enim utraque linea rationalis. commēſurabile ergo erit etiā quadratum lineæ εζ quadrato lineæ γδ, per 10 huius. ſed quadratum lineæ εζ eſt rationale. ergo ſimiliter rationale erit quadratum lineæ γδ. linea ergo γδ erit rationalis. Et quoniam linea εζ eſt longitudine incommenſurabilis lineæ εκ. nam illæ ſunt potentia tantum inter ſe cōmenſurabiles. Sicut autem linea εζ ad lineā εκ, ita quadratum lineæ εζ ad parallelogrammum ex ambabus lineis εζ, εκ contentum per lemma proximum. incommenſurabile eſt ergo quadratum lineæ εζ parallelogrammo ex lineis εζ, εκ per ſecundam partem decimi theorematis huius libri. Sed quadrato lineæ εζ quadratum lineæ γδ eſt commenſurabile: modo enim probatum eſt utrāque lineam eſſe rationalem. Ergo per 13 huius, quadratum lineæ γδ eſt incommenſurabile parallelogrammo ex lineis εζ, εκ. Sed parallelogrammum ex lineis γδ, γβ eſt æquale parallelogrammo ex lineis εζ, εκ, ut modo probatum eſt. Ergo quadratum lineæ γδ eſt incommenſurabile parallelogrāmo ex lineis γδ, γϐ. (hæc uerò pars breuius concluditur per corollariū à nobis poſitū poſt 14 theorema) Sed ſicut ſe habet quadratū lineæ γδ ad parallelogrammum ex lineis δγ, γϐ, ita ſe habet linea δγ ad lineam γβ per lemma proximum:

incommenſurabilis longitudine eſt itaque linea α γ *lineæ* γ β. *Rationalis eſt ergo linea* γ α *& longitudine incommenſurabilis lineæ* γ β. *quod demonſtrandum erat.*

Hoc theorema eſt ἀντίστροφον *proxime præcedentis. Vt uerò fieri poſſit quod requirit hoc theorema, ſcilicet applicari quadratum lineæ medialis ſecundum lineam rationalem, reperienda eſt tertia linea proportionalis ſicut docet* 11. *ſexti, ita tamen ut linea rationalis ſit prima, ſecunda ſit linea medialis quæ poteſt quadratum applicandum. Nam ſuperficies quæ fit ex prima & tertia eſt æqualis quadrato mediæ per* 17 *ſexti.*

Vigeſimumquartum Theorema.

Linea recta mediali commẽſurabilis, eſt ipſa quoque medialis.



Sit linea medialis α, *ſitq́; linea illi commenſurabilis* β *ſiue longitudine & potentia, ſiue potentia tãtum, ut recte addidit Campanus, & in uetuſto exemplari græco legitur. dico lineam* β *eſſe medialẽ. Exponatur linea rationalis* γ α, *& quadrato lineæ* α *æquale parallelogrammum rectangulum applicetur ſecundum lineam* γ α, *ſitq́; parallelogrammũ* γ ε, *eiúſque alterum latus ſit linea* ε α. *Rationalis itaq; erit linea* ε α, *& incommenſurabilis longitudine lineæ* γ α, *per proximum theorema. Rurſus quadrato lineæ* β *æquale ſecundum lineam* γ α *applicetur parallelogrãmum*

mum rectangulum γζ,cuius alterum latus ſit δζ. Cum igitur commenſurabilis ſit linea α lineæ β,commẽſurabile quoque erit quadratum lineæ α,quadrato lineæ β. ſed quadrato lineæ α æquale eſt ε γ,quadrato autem lineæ β æquale eſt γζ:commenſurabile eſt ergo parallelogrammum ε γ parallelogrammo γζ.Eſt autem ſicut parallelogrammum γ ε ad parallelogrammum γζ,ita linea ε δ ad lineam δζ per primam ſexti.commenſurabilis eſt ergo longitudine linea ε δ lineæ δζ per 10 huius. Sed linea ε δ eſt rationalis & incommenſurabilis longitudine lineæ γ δ.Rationalis eſt ergo linea δζ & incommenſurabilis longitudine lineæ δ γ per 13 huius. Ergo lineæ γ δ,δζ ſunt rationales potentia tantum commenſurabiles.Sed linea quæ poteſt parallelogrammum rectãgulum comprahenſum rationalibus potentia tantum cõmenſurabilibus,medialis eſt per 22 huius.Igitur medialis eſt quæ parallelogrammum ex γ δ,δζ poteſt.Id uerò poteſt linea β,ergo linea β medialis eſt.

Corollarium.

Vnde manifeſtum eſt ſuperficiem commẽſurabilem ſuperficiei mediali,medialem eſſe.Nam lineæ quæ poſſunt tales ſuperficies,ſunt potentia commenſurabiles, quarum linearum altera,quæ ſcilicet poteſt ſuperficiem medialem,medialis eſt, quare & reliqua medialis erit per hoc theorema 24. Sane quemadmodum diximus de lineis rationalibus,ita dicendũ eſt in lineis medialibus, nempe lineam mediali commenſurabilem eſſe etiã medialem,lineam inquam quæ ſit commẽſurabilis mediali ſiue ſit longitudine & potentia commenſurabilis,ſiue

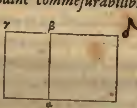
potentia tantum in uniuerſum, enim uerum eſt lineas longitudine commenſurabiles, eſſe quoque potentia cõmenſurabiles. Quod ſi lineæ mediali fuerit alia commẽſurabilis potentia, ſiquidem & longitudine cõmenſurabilis fuerit, dicuntur illæ lineæ mediales longitudine & potentia commenſurabiles. ſi uerò potentia tantum fuerint inter ſe commenſurabiles, dicuntur mediales potentia tantum commenſurabiles. Sunt autem & aliæ lineæ rectæ longitudine quidem incõmenſurabiles mediali, potentia tantum eidem commenſurabiles, hæ uerò dicuntur & ipſæ mediales, eò quia commenſurabiles ſunt potẽtia lineæ mediali, & ea ratione qua ſunt mediales, ſunt inter ſe potẽtia commẽſurabiles, ſed & inter ſe ipſæ comparatæ, poſſunt eſſe ſiue longitudine & ideo etiam potentia commenſurabiles, ſiue potẽtia tantum. Et quidem ſi longitudine, dicũtur & ipſæ mediales longitudine commenſurabiles, ut conſequenter intelligatur potentia quoque commenſurabiles eſſe. Quòd ſi potentia tantum ſint inter ſe commenſurabiles, nihilominus tamen & ipſæ dicuntur mediales potentia tantum commenſurabiles. Hoc loco addit exemplar græcũ, *quod autem lineæ mediales ſint cõmenſurabiles, ita demonſtrari poteſt. Quoniã mediales mediali cuidã ſunt commenſurabiles: quæ uerò ſunt eidem commenſurabilia, inter ſe quoque ſunt commẽſurabilia.* Ergo *mediales ſunt inter ſe commenſurabiles. hoc totum nõ eſt* Euclidis, *neque ullius omnino geometræ. nam quum dicitur, quoniam mediales mediali cuidam ſunt commenſurabiles, petitur principium.* Præterea *falſum eſt ſimpliciter*

pliciter lineas mediales eſſe commenſurabiles, quod patebit ex theoremate 35 huius libri, ubi propoſitum eſt reperire lineas duas potentia incommenſurabiles cõficientes compoſitum ex quadratis ipſarũ mediale, & id parallelogrammum quod fit ex eiſdẽ mediale, ipſum etiã incommenſurabile compoſito ex quadratis illarum. Cũ *ergo reperiantur duo medialia incõmenſurabilia, certum eſt lineas quæ illa poſſunt eſſe mediales potentia incommenſurabiles, quas neceſſe eſt eſſe etiam longitudine incommenſurabiles.*

Vigeſimumquintum Theorema.

Parallelogrammum rectangulum contentũ ex lineis medialibus longitudine commenſurabilibus mediale eſt.

Ex lineis enim medialibus longitudine commẽſurabilibus α β, β γ contineatur parallelogrammum rectãgulũ α γ, dico illud parallelogrãmum eſſe mediale. Deſcribatur e*nim ex linea α β quadratum*



α δ: mediale eſt ergo quadratum illud α δ. Et *quoniã linea α β eſt longitudine cõmẽſurabilis lineæ β γ, æqualisque eſt linea α β lineæ β δ, commenſurabilis eſt ergo longitudine linea β δ, lineæ β γ. ſed quemadmodum ſe habet linea δ β ad lineam β γ, ita quadratum δ α ad parallelogrammum α γ per primam ſexti.* Ergo *per decimum theorema huius libri quadratum δ α eſt commenſurabile parallelogrammo α γ. ſed quadratũ δ α eſt me-*

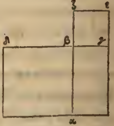
O

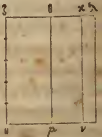
diale quia deſcribitur à linea mediali. Ergo *per corollarium proximi theorematis parallelogrammũ* $\alpha\gamma$ *erit etiam mediale.quod demonſtrandum erat.*

Vigeſimumſextum Theorema.

Parallelogrammum rectangulum comprehenſum duabus lineis medialibus potentia tantum commenſurabilibus, uel rationale eſt, uel mediale.

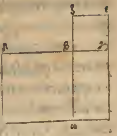
Propoſita linea quæ ſit medialis, alia reperitur potẽtia tantum commenſurabilis eidem per 11 *huius, ſicut de rationalibus ibidem dictum eſt.* Ex *duabus itaque medialibus potentia tantum cõmenſurabilibus* $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, *parallelogrammum rectangulum comprehendatur quod ſit* $\alpha\gamma$. Dico *illud parallelogrammum eſſe aut rationale aut mediale.* Deſcribãtur *enim quadrata linearũ* $\alpha\beta$, $\beta\gamma$ *quæ ſint* $\alpha\delta$, $\beta\varepsilon$, *mediale eſt ergo utrũque per* 22 *huius.* Proponatur *linea rationalis* $\kappa\zeta$ *ſecundũ quam applicetur æquale quadrato* $\alpha\delta$ *parallelogrammum rectangulum* $\kappa\theta$, *cuius alterũ latus ſit* $\zeta\theta$. *(hoc autẽ quomodo fiat diximus in theoromate* 23.) *parallelogrammo uerò* $\alpha\gamma$ *æquale ſecundum lineam* $\theta\mu$, *æqualem lineæ* $\zeta\kappa$ *applicetur parallelogrammum rectangulum* $\mu\kappa$, *cuius alterũ latus ſit* $\theta\kappa$. *(ut autem id fiat, ſumẽda eſt quarta li-*



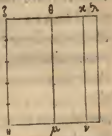


nea

nea proportionalis ad lineas θ μ, κ ς, β γ per 12 ſexti, quæ quarta ſit θ κ: ergo per 16 ſexti parallelogrammum ex θ μ, θ κ erit æquale parallelogrammo ex lineis α β, β γ.) præterea quadrato β ι æquale ſimiliter ſecundum lineã κ ν applicetur parallelogrammum rectangulum ν λ, cuius alterum latus ſit κ λ. In eadem ergo recta linea ſunt lineæ ζ θ, θ κ, κ λ. (Nam illa parallelogramma ſic applicata ſecũdum lineas ζ κ, θ μ, κ ν ſunt rectangula, & anguli ζ θ μ, κ θ μ æquales duobus rectis, quia ſunt ipſi recti. Itaque lineæ ζ θ, θ κ ſunt in eadem linea recta per 14 primi. idem dices de angulis θ κ ν, λ κ ν.) Cum igitur mediale ſit utrũque quadratum α δ, β ι parallelogramma illis æqualia κ θ, ν λ ſimiliter medialia erunt. Illa autem applicantur ſecundum lineam rationalẽ, nempe ζ κ: rationalis eſt ergo utraque linea ζ θ, κ λ & incommenſurabilis longitudine lineæ ζ κ per 23 huius. Sed quia lineæ α β, β γ poſitæ ſunt potentia commenſurabiles: ergo quadratum α δ eſt commenſurabile quadrato β ι. ſimiliter igitur illis æqualia parallelogramma κ θ, ν λ erunt inter ſe commenſurabilia. Sed ſicut ſe habet parallelogrammum κ θ ad parallelogrammum ν λ, ita ſe habet linea ζ θ, ad lineam κ λ per primum ſexti. Ergo per decimum huius linea ζ θ erit commenſurabilis longitudine lineæ κ λ. Lineæ ergo ζ θ, κ λ ſunt rationales, longitudine inter ſe commenſurabiles. inter ſe dico longitudine commẽſurabiles. Nam ipſi lineæ ζ κ propter quam ſunt rationales, ſunt longitudine incommenſurabiles, ut modo probatum eſt. Ergo parallelogrammum contentum ex illis lineis ζ θ, κ λ eſt rationale per 20 huius. & quoniam



linea β δ eſt æqualis lineæ β α,linea uerò ζ β æqualis lineæ β γ:eſt igitur ſicut linea β δ ad lineam β γ,ita linea α ε ad lineã β ζ.Sed ſicut linea δ β ad lineam β γ,ita quadratũ δ α ad parallelogrammum α γ per primum ſexti.ſicut autem linea α ε ad lineam β ζ,ita parallelogrammum α γ ad quadratũ ε ι. Eſt igitur ſicut quadratũ α δ ad parallelogrammũ α γ, ita parallelogrãmũ α γ ad quadratũ β ι.quadrato autẽ α δ æquale eſt parallelogrammũ η θ. parallelogrammo autẽ α γ æquale eſt item parallelogrãmũ μ κ.quadrato uerò β ι æquale eſt parallelogrãmũ ν λ.Eſt igitur ſicut parallelogrãmũ η θ ad parallelogrãmũ μ κ, ita parallelogrãmũ μ κ ad parallelogrãmũ ν λ. Eſt ergo per primũ ſexti ſicut linea ζ θ ad lineã θ κ,ita linea θ κ ad lineã κ λ. Ergo parallelogrammũ contentum ex lineis ζ θ, κ λ eſt æquale quadrato lineæ θ κ per 17 ſexti.ſed parallelogrãmũ ex lineis ζ θ, κ λ eſt rationale, ut modo probatũ eſt,rationale eſt ergo quadratũ lineæ θ κ. ergo linea θ κ erit rationalis.Et quidẽ ſi ipſa linea in quã θ κ fuerit longitudine cõmenſurabilis lineæ θ μ,id eſt lineæ ζ η ipſi æquali, rationale tũc erit parallelogrãmũ θ ν per 20 huius.Quod ſi fuerit longitudine incõmenſurabilis ipſi lineæ ζ η, tunc lineæ θ μ, θ κ ſunt rationales potentia tantũ cõmenſurabiles:ſic igitur parallelogrammũ θ ν erit mediale. Ergo



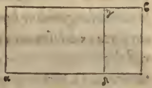
paral-

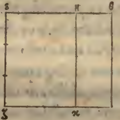
parallelogrammũ θ ι erit uel mediale uel rationale: ſed parallelogrammũ θ ι eſt æquale parallelogrammo α γ. Ergo parallelogrammum α γ erit aut mediale aut rationale. Quomodo autem reperiantur lineæ mediales potentia tantum commenſurabiles rationale parallelogrammum continentes, item aliæ mediale continentes, docebunt theoremata 28. & 29.

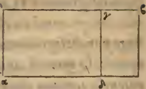
Vigeſimumſeptimum Theorema.

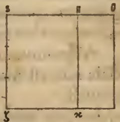
Mediale non eſt maius quàm mediale ſuperficie rationali.

Nam ſi fieri poteſt mediale α β ſit maius quàm mediale α γ ſuperficie rationali quæ ſit δ β, & proponatur linea rationalis ι ζ, & mediali α β æquale ſecundum lineam ι ζ applicetur parallelogrammum ζ θ, cuius alterum latus ſit ι θ. ipſi autem mediali α γ æquale itẽ auferatur parallelogrammũ ζ κ. Reliquum ergo ε δ reliquo κ θ æquale eſt. ſed per poſitionem β δ eſt rationale, ergo rationale etiam erit κ θ. Cum igitur mediale ſit utrunque α β, α γ, ſitq́; α ε æquale ipſi ζ θ: ſit etiã α γ æquale ipſi ζ κ, mediale eſt ergo utrunque etiam ζ θ, ζ κ. & ſecundum lineam rationalẽ ι ζ applicãtur. rationalis eſt ergo utraq́; linea θ ι, ι κ & incommenſurabilis longitudine lineæ ι ζ per 23 huius. Et quoniam rationale eſt δ ε, ipſiq́; æquale κ θ: rationale etiam erit κ θ, & ſecundum lineam ra-









tionalem εζ uel ei æqualem ηκ applicatur: rationalis eſt ergo linea ηθ, & commenſurabilis longitudine lineæ ηκ per 21 huius. ſed linea ηκ eſt æqualis lineæ εζ: ergo linea ηθ eſt rationalis, & cõmenſurabilis lõgitudine lineæ εζ. ſed & linea εη rationalis eſt & incommenſurabilis longitudine lineæ εζ. Ergo linea *ηε erit incommenſurabilis longitudine lineæ ηθ per 14 huius.* Eſt *autẽ ſicut linea εη ad lineam ηθ, ita quadratũ lineæ εη ad parallelogrammum ex εη, ηθ per lemma ſuprapoſitũ poſt theorema 22.*Incommenſurabile *eſt ergo quadratum lineæ εη parallelogrãmo ex lineis εη, ηθ per 10 huius. ſed quadrato lineæ εη commenſurabilia ſunt quadrata linearũ εη, ηθ. ambo enim ſunt rationalia, ut modo probatum eſt.* Ergo *quadrata linearum εη, ηθ ſunt incommenſurabilia parallelogrammo ex lineis εη, ηθ per 14 huius. parallelogrammo uerò ex lineis εη, ηθ commenſurabile eſt id quod fit bis ex lineis εη, ηθ (habent enim proportionem ſicut numerus ad numerum, nempe ſicut unitas ad binariũ, aut ſicut binarius ad quaternariũ: itaque per 6 huius ſunt commẽſurabilia)* Ergo *per eandem 14 huius, id quod fit bis ex lineis εη, ηθ eſt incommẽſurabile quadratis linearum εη, ηθ. hoc breuius concluditur per corollarium 14 theorematis.* Sed *quadrata linearum εη, ηθ & id quod fit bis ex lineis εη, ηθ ſunt*

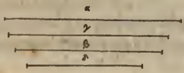
æqualia

æqualia quadrato totius lineæ ι θ per 4. ſecundi. Ergo quadratum lineæ ι θ eſt incommenſurabile quadratis linearum ι κ, κ θ per 17 huius. ſed quadrata linearum ι κ, κ θ ſunt rationalia: ergo quadratum lineæ ι θ eſt irrationale. irrationalis eſt ergo linea ι θ. Sed modo demõſtratũ eſt eã eſſe rationalẽ, quod fieri nullo modo poteſt. non igitur mediale maius eſt mediali ſuperficie rationali.

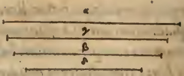
Vigeſimumoctauum Theorema.

Mediales lineas inuenire potentia tantum cõmenſurabiles rationale comprehendentes.

Proponantur duæ rationales lineæ potentia tantum commenſurabiles α, ϐ: ſumatúrq; media proportionalis inter eas linea γ, ſitq́; ſicut linea α ad lineã ϐ, ita



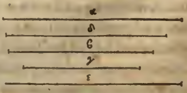
linea γ ad lineam δ per 13 ſexti. Cũ igitur lineæ α, ϐ ſint rationales potentia tantum commenſurabiles, parallelogrammum comprehenſum ex lineis α, ϐ, hoc eſt quadratum lineæ γ (nam quadratũ lineæ γ eſt æquale parallelogrãmo ex lineis α, ϐ per 17 ſexti) eſt mediale: medialis eſt ergo linea γ. Et quoniam eſt ſicut linea α ad lineã ϐ, ita linea γ ad lineam δ. erit ſicut quadratum lineæ α ad quadratum lineæ ϐ, ita quadratum lineæ γ ad quadratum lineæ δ per 22. 6. ſed quadrata linearum α, ϐ ſunt commenſurabilia, quia lineæ α, ϐ poſitæ ſunt rationales potẽtia tantũ commenſurabiles. ergo & quadrata linearum γ, δ ſunt etiam commenſurabilia per



10 *huius.ergo & linea γ,δ ſunt etiã potentia commenſurabiles per diffinitionẽ. Eſt autẽ linea γ medialis.* Medialis ergo eſt etiam linea δ per 24 huius. Ergo lineæ γ,δ ſunt mediales potentia tantum commenſurabiles. Dico præterea eas continere parallelogrammũ rationale. Cum enim ſit ſicut linea α ad lineam β, ita linea γ ad lineam δ. permutata ergo proportione erit ſicut linea α ad lineam γ, ita linea β ad lineam δ. ſed ſicut eſt linea α ad lineam γ, ita linea γ ad lineam β. ergo ſicut linea γ ad lineã β, ita linea β ad lineam δ. ergo parallelogrammum ex lineis γ,δ eſt æquale quadrato lineæ β: ſed quadratum lineæ β eſt rationale, quia linea β poſita eſt rationalis. Rationale eſt ergo parallelogrammum ex lineis γ,δ. repertæ ſunt ergo mediales potentiæ tantum commenſurabiles rationale continentes, quod faciendum erat.

Vigeſimumnonum Theorema.

Mediales lineas inuenire potentia tantum cõmenſurabiles mediale comprehendentes.



Proponãtur tres rationales potentia tantum cõmenſurabiles α,β,γ, ſumaturq; inter lineas α, β media proportionalis δ per 13.6. fiatq; ſicut linea

nea

nea β ad lineam γ,ita linea δ ad lineā ε per 12.6. *Cum igitur lineæ α,β ſint rationales potentia tantum cōmenſurabiles,ergo parallelogrammum ex α,β,hoc eſt quadratum lineæ δ eſt mediale, medialis eſt ergo linea δ.*Et *cum lineæ β,γ ſint potentia tantum commenſurabiles, ſitq́; ſicut β ad γ,ita δ ad ε.ergo δ,ε ſunt potentia tantū commenſurabiles. ſed linea δ eſt medialis.ergo linea ε, erit etiam medialis.ergo lineæ δ,ε ſunt mediales potentia tantum commenſurabiles.* Dico *præterea eas continere mediale.*Cum *enim ſit ſicut linea β ad lineā γ,ita δ ad ε:permutatim ergo ſicut β ad δ, ita γ ad ε.ſed ſicut β ad δ, ita δ ad α per cōuerſam ſiue contrariam proportionem,quæ probatur per corollarium quarti theorematis libri quinti.*Itaque *ſicut δ ad α,ita γ ad ε.itaque parallelogrammum ex α,γ eſt æquale parallelogrammo ex δ,ε per* 16.6.*Sed parallelogrammū ex α γ per* 22 *huius mediale eſt, ergo mediale quoque erit parallelogrammum ex δ,ε.*Repertæ *ſunt ergo mediales potentia tantum commenſurabiles mediale comprehendentes,quod demonſtrandum erat.*

Lemma.

Reperire *duos numeros quadratos huiuſmodi,ut numerus qui efficitur ex ipſorū additione ſit etiā quadratus.* Proponātur *duo numeri α β,ζ γ ſimiles ſuperficiales,qui quomodo reperiātur,dictum eſt in theoremate* 9.*ſint*



*autem ambo pares uel ambo impares,ſit etiam maior α β.*Et *quia ſiue à numero pari par auferatur,ſiue ab*

impari impar reſiduus eſt par, per 24 & 26.9. Dempto itaque ϐ γ de α ϐ reſiduus α γ par erit. Secetur numerus α γ in duas partes æquales in puncto δ, numerus ergo productus ex multiplicatione numerorũ α ϐ, ϐ γ cum numero quadrato producto ex multiplicatione γ δ in ſeipſum, eſt æqualis quadrato producto ex multiplicatione β δ in ſe ipſum, per ea quæ demõſtrat Campanus propoſitione 16. libri 9. quam demonſtrationem ſumpſit ex 6 theoremate libri ſecundi. Eſt autẽ numerus productus ex multiplicatione α β, β γ, quadratus, per 1.9. Reperti ſunt ergo duo numeri quadrati, nẽpe alter productus ex α ϐ, β γ, alter autem ex multiplicatione γ δ in ſeipſum, qui compoſiti per additionẽ efficiunt numerũ quadratum, nempe productum ex multiplicatione β δ in ſeipſum.

α —5— δ —5— γ —8— ϐ

Corollarium.

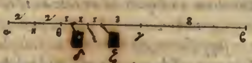
Ex hoc manifeſtum etiã illud eſt repertos eſſe duos numeros quadratos, nempe alterum productum ex multiplicatione β δ in ſeipſum, item alterum ex multiplicatione γ δ in ſeipſum tales, ut numerus quo excedit alter alterum, ille inquam numerus qui producitur ex multiplicatione α β, β γ: ſit etiam quadratus quando uidelicet numeri α β, β γ fuerint ſimiles ſuperficiales. Quòd ſi nõ fuerint ſimiles ſuperficiales, reperti ſunt duo quadrati, nẽpe alter productus ex radice β δ, & alter productus ex radice γ δ, quorum exceſſus, id eſt numerus quo maior excedit minorem, uidelicet productus ex α ϐ, β γ non eſt quadratus.

Lemma.

Lemma.

Reperire duos quadratos numeros huiuſmodi ut compoſitus ex ipſorum additione ne ſit quadratus.

Sit numerus productus ex multiplicatione numerorum



α γ, β γ, ut diximus in proximo lemmate, quadratus: ſitq́; numerus γ α par, diuidatúrque idem numerus γ α in duas partes æquales in puncto δ. Manifeſtum eſt numerum quadratum qui fit ex multiplicatione α β, ε γ, cum quadrato radicis γ δ, æqualem eſſe quadrato radicis β δ, per ea quæ dicta ſunt in proximo lēmate. auferatur unitas ex δ γ, quæ unitas ſit δ ζ. Ergo quadratus productus ex multiplicatione α β, ε γ, cū quadrato radicis γ ζ, minor eſt quadrato radicis β δ. Dico itaque numerū compoſitū ex quadrato producto per multiplicationē α ε, β γ, & quadrato radicis γ ζ, non eſſe quadratū. Quòd ſi dicas eſſe quadratū, ſimul oportet eū eſſe maiorē aut æqualē aut minorē quadrato radicis ε ζ. Primū non poteſt eo maior eſſe. Modo enim probatū eſt numerū productū ex α ε, β γ, unà cū quadrato radicis γ ζ, eſſe minorem quadrato radicis ε δ: ſed inter quadratū radicis β δ & quadratum radicis ε ζ, nullus medius quadratus interuenit. Nam radix β δ excedit radicem β ζ, ſola unitate quæ unitas in numeros diuidi nullo modo poteſt. Aut ſi numerus productus ex α ε, β γ, unà cū quadrato radicis γ ζ eſſet maior quadrato radicis β ζ,

oporteret eundem numerum productum ex α ϛ, β γ unà cum quadrato radicis γ ι, eſſe æqualẽ quadrato radicis β δ, cuius modo probatũ eſt cõtrarium. Sit ergo, *ſiquidẽ illud fieri poſſe dicis, numerus productus ex α β, ϛ γ, unà cum quadrato radicis γ ι æqualis quadrato radicis β ι, ſitq; numerus κ α duplus ad unitatẽ δ ι, id eſt binarius. Cum igitur totus numerus α γ totius numeri γ δ ſit duplus ex ſuppoſitione, & numerus α κ ſit duplus ad unitatẽ δ ι: ergo reſiduus numerus γ κ ad reſiduũ numerũ ι γ, duplus erit per* 5.5. *ſiue per* 7.7. & 11. *eiuſdẽ* 7. Ergo *in duas partes æquales diuiſus eſt numerus κ γ, in puncto ι.* Numerus *itaq; productus ex κ β, β γ unà cũ quadrato radicis γ ι eſt æqualis quadrato radicis ι β. ſed per poſitionem tuam numerus productus ex α β, β γ unà cũ quadrato γ ι, eſt æqualis eidẽ quadrato radicis ϛ ι.* Ergo *numerus productus ex κ β, β γ unà cũ quadrato radicis γ ι eſt æqualis numero producto ex α β, β γ unà cũ quadrato radicis γ ι, quia quæ uni & eidẽ ſunt æqualia, inter ſe quoq; ſunt æqualia. ſed ſi ab æqualibus æqualia demas, quæ remanẽt ſunt æqualia.* Ergo *numerus productus ex κ β, ϛ γ, eſt æqualis numero producto ex α β, β γ.* Ergo *per* 17. *uel* 18. 7. *numerus κ β eſt æqualis numero α β minor maiori, quod eſt impoßibile.* Non *igitur erit numerus productus ex α β, β γ cũ quadrato radicis γ ι, æqualis quadrato radicis ϛ ι.* Dico *ſimiliter eũdem numerum productũ ex α β, β γ unà cum quadrato radicis γ ι non eſſe minorem quadrato radicis β ι.* Si *enim fieri poſſe dicas, erit ergo æqualis cuipiam numero quadrato minori quàm eſt quadratus radicis β ι. ſit*

ergo

ergo numerus ille productus ex α β, β γ, unà cum quadrato radicis γ ι æqualis quadrato radicis β ζ, ſumatúrque numerus θ α duplus ad numerum δ ζ. efficitur ſimiliter ut numerus θ γ ſit duplus ad numerũ ζ γ, ita ut etiam θ γ ſecetur in partes duas æquales in puncto ζ. ideóque ſimul numerus productus ex θ β, β γ cum quadrato radicis ζ γ erit æqualis quadrato radicis β ζ.



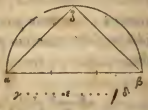
Sed per poſitionẽ tuã numerus productus ex α β, β γ unà cum quadrato radicis γ ι erat æqualis quadrato radicis β ζ. efficitur ergo ut numerus productus ex α β, β γ unà cum quadrato radicis γ ι ſit æqualis numero producto ex θ ε, β γ, unà cum quadrato radicis γ ζ, quod eſt impoßibile. Nam *ſi eſſet æqualis, cum quadratus radicis γ ζ ſit minor quadrato radicis ε ι, oporteret numerũ productum ex θ ε, ε γ eſſe maiorẽ numero producto ex α β, β γ, itaque ſimul neceſſe eſſet numerum θ ε eſſe maiorem numero α ε, cum tamen ſit eo minor.* Non *erit ergo numerus productus ex α ε, ε γ cum quadrato radicis γ ι æqualis numero minori quàm ſit quadratus radicis ε ι. Sed demonſtratum eſt neque eſſe poſſe eidem æqualem, neq; maiorem: igitur numerus ex α ε, ε γ unà cũ quadrato radicis γ ι, compoſitus quadratus eſſe nullo modo poteſt.*

Trigeſimum Theorema.

Reperire duas rationales potentia tantũ commen-

ſurabiles huiuſmodi, ut maior ex illis poſsit pluſquam minor quadrato lineæ ſibi commenſurabilis longitudine.

Eſto propoſita linea rationalis α β, & duo numeri quadrati γ δ, δ ε, huiuſmodi, ut exceſſus illorũ γ ε ne ſit quadratus numerus per corollarium prioris lemmatis ex



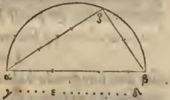
duobus modo dictis: deſcribaturque ſuper linea α β, ſemicirculus α ζ β, fiatq; ſicut numerus γ δ ad numerum γ ε, ita quadratum lineæ α β ad quadratum alterius lineæ quæ ſit α ζ per lemma poſitum poſt 6. theorema huius libri, & ducatur linea ζ β. Cum igitur ſit ſicut quadratum lineæ α β ad quadratum lineæ α ζ, ita numerus γ δ ad numerum γ ε, ergo commenſurabile eſt quadratum lineæ α β, ad quadratum lineæ α ζ per 6 huius. ſed quadratum lineæ α β eſt rationale. ergo etiam rationale erit quadratum lineæ α ζ. Rationalis *eſt ergo linea α ζ. Cumq; numerus δ γ, ad numerum γ ε proportionem non habeat quam quadratus numerus ad quadratum numerum per 24.8. à deſtructione conſequentis: neque ſimiliter quadratum lineæ α β ad quadratum lineæ α ζ proportionem habebit quam quadratus numerus ad quadratum numerum.* Ergo *linea α β erit incommenſurabilis longitudine lineæ α ζ, per 9 huius. ergo lineæ α β, α ζ, ſunt rationales potentia tantum commenſurabiles. Cumque ſit ſicut numeus γ δ ad numerum γ ε, ita quadratum lineæ α β, ad quadratũ lineæ α ζ. per euer-*

ſam

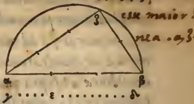
ſam ergo porportionem quæ dicitur ἀναςροφὴ λόγου, *demonſtratúrque per corollarium 19 theorematis libri 5. ſicut numerus γ δ ad numerum δ ε, ita quadratum lineæ α β ad quadratum lineæ β ζ, qui eſt exceſſus quadrati lineæ α ε, ſupra quadratum lineæ α ζ per lemma poſitum poſt 14 huius libri. ſed numerus γ δ ad numerum δ ε habet proportionem quam numerus quadratus ad numerum quadratum.*Ergo *quadrátum lineæ α β ad quadratum lineæ ε ζ proportionem habet quam quadratus numerus ad numerum quadratum.*ergo *linea α ε eſt commenſurabilis longitudine lineæ ε ζ, per 9 huius.Eſt autem quadratum lineæ α ε æquale duobus quadratis linearum α ζ, ζ ε.* Ergo *linea α β plus poteſt quàm linea α ζ quadrato lineæ ε ζ ſibi commenſurabilis longitudine.*Repertæ *ſunt ergo duæ rationales potentia tantum cõmenſurabiles huiuſmodi &c. quod demonſtrandum erat.*

Lemma.

R*eperire duas rationales potentia tantum commenſurabiles huiuſmodi, ut maior plus poßit quàm minor quadrato lineæ ſibi incommenſurabilis longitudine.*



Pro*ponatur lineâ rationalis α ε, & numeri quadrati duo γ ε, ε δ, tales ut compoſitus ex ipſis nempe γ δ, ne ſit quadratus per alterũ lemma poſitum poſt 29 theorema huius libri : deſcribatúrque ſuper linea α ε ſemicirculus α ζ ε, fiatq́; ſicut numerus δ γ ad numerum γ ε, ita quadratum lineæ α β, ad quadratum lineæ α ζ: duca-*



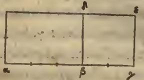
túrque linea à puncto ζ in punctum β quæ ſit ζβ, quẽadmodũ in præcedẽti theoremate. ſimiliter hîc demonſtrabimus lineas αβ, αζ, eſſe rationales potentia tantum commenſurabiles. Et *cum ſit ſicut numerus δγ ad numerum γε, ita quadratum lineæ αβ ad quadratum lineæ αζ.* Per *euerſam ergo proportionem quemadmodũ numerus δγ ad numerum δε, ita quadratũ lineæ αβ ad quadratum lineæ ζβ, ut diximus in præcedẽti theoremate. ſed numerus γδ ad numerum δε proportionẽ non habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum per corollarium illatum à deſtructione conſequentis 24 lib.*8.*Neque ergo quadratum lineæ αβ ad quadratum lineæ βζ proportionem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum.* Ergo *per 9 huius linea αβ erit incommenſurabilis longitudine lineæ ζβ.* Poteſt *autem linea αβ plus quàm linea αζ quadrato lineæ βζ ſibi incommenſurabilis longitudine.* Ergo *lineæ αβ, αζ ſunt duæ rationales potentia tãtum cõmenſurabiles, & poteſt linea αβ plus quàm linea αζ quadrato lineæ ζβ ſibi incommenſurabilis longitudine.*

Lemma.

Si ſint duæ lineæ rectæ habentes inter ſe aliquam proportionem, erit ut linea recta ad lineam rectam, ita parallelogrammum contentum ex ambabus ad quadratum lineæ minoris ex illis duabus. Hoc *lemma nihil amplius affert quàm primum theorema libri ſexti, itaque non reperitur*

reperitur in quibuſdam exemplaribus.

Sint duæ rectæ lineæ α ϐ, ϐ γ in aliqua proportione. Dico ſicut linea α ϐ ad lineam ϐ γ, ita eſſe parallelogrammum ex α ϐ, ϐ γ ad quadratũ ϐ γ. Deſcribatur enim quadratũ lineæ ϐ γ, quod ſit ϐ δ ε γ, compleatúrq; parallelogrammum α δ. manifeſtum

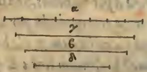


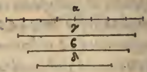
eſt ſicut linea α ϐ ad lineam ϐ γ, ita parallelogrammũ α δ ad parallelogrammum uel quadratum ϐ ε per primam ſexti. Eſt autem parallelogrammum α δ contentũ ex lineis α ϐ, ϐ γ. eſt enim æqualis linea ϐ γ lineæ ϐ δ. parallelogrammum autem ϐ ε eſt quadratum lineæ ϐ γ. Ergo ſicut linea α β ad lineam ϐ γ, ita parallelogrammum ex α ϐ, ϐ γ ad quadratum lineæ ϐ γ. quod demonſtrandum erat.

Trigeſimumprimum Theorema.

Reperire duas lineas mediales potentia tantum cõmenſurabiles rationalem ſuperficiem continentes, tales inquam, ut maior poſſit pluſquã minor quadrato lineę ſibi cõmenſurabilis longitudine.

Proponantur duæ rationales potentia tantum commenſurabiles α, ϐ, tales ut maior α poſſit plus quàm minor ϐ quadrato lineæ ſibi commenſurabilis longitudine per 30 theorema, ſitq́; parallelogrammo ex α, β æquale quadratum lineæ γ (quod ſit reperta linea me-





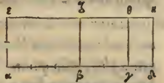
dia proportionali,nempe linea γ inter α,ϐ,ut traditur libro ſexto). Eſt autem mediale parallelogrã mũ ex α,ϐ per 22 huius libri.ergo ſimiliter mediale erit quadratũ lineæ γ. linea ergo γ erit medialis. Q*uadrato autẽ lineæ ϐ æquale ſit parallelogrammũ ex γ,δ, reperta tertia proportionali,nẽpe linea δ, ad duas lineas γ,ϐ,ut traditur libro 6.* E*ſt autem quadratum lineæ ϐ rationale.eſt ergo & parallelogrammum ex γ,δ rationale.* Et *quoniã ſicut linea α ad lineam ϐ,ita eſt parallelogrammum ex α,ϐ ad quadratum lineæ ϐ per lemma modò poſitum.*Sed *parallelogrammo ex α,ϐ, æquale eſt quadratum lineæ γ.quadrato autẽ lineæ ϐ æquale eſt parallelogrammum ex lineis γ,δ,ut modo probatũ eſt.* E*ſt ergo ſicut linea α ad lineam ϐ,ita quadratum lineæ γ ad parallelogrammum ex γ,δ.*Sed *ſicut eſt quadratũ lineæ γ ad parallelogrammum ex γ,δ,ita linea γ ad lineam δ per lemma poſitum ante 23 huius libri.* Ergo *ſicut linea α ad lineam ϐ, ita linea γ ad lineã δ.* Sed *linea α eſt poſita commenſurabilis potentia tantum lineæ ϐ.* Ergo *etiam linea γ eſt commenſurabilis potentia tantũ lineæ δ per 10 huius.*Sed *linea γ eſt medialis,ergo etiam linea δ erit medialis per 24 huius.* Et *quoniam eſt ſicut linea α ad lineam ϐ, ita linea γ ad lineam δ. lineáque α poteſt pluſquam linea ϐ quadrato lineæ ſibi commenſurabilis longitudine per ſuppoſitionem.*Ergo *etiam linea γ poterit pluſquam linea δ quadrato lineæ ſibi cõmẽſurabilis longitudine per 15 huius.*Repert*æ ſunt ergo*

go

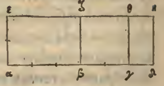
go duæ mediales potentia tantum commenſurabiles γ, δ, rationalem ſuperficiem continentes, poteſtque linea γ pluſquam linea δ quadrato lineæ ſibi commenſurabilis longitudine. Similiter etiam reperiri poſſunt duæ mediales potentia tantum commenſurabiles rationale continentes, tales ut maior poſsit pluſquā minor quadrato lineæ ſibi incommenſurabilis longitudine, quando uidelicet linea α poterit pluſquam linea β quadrato lineæ ſibi incommenſurabilis longitudine. quod facere docuit prius lemma poſitū poſt 30 *theorema huius libri.* Manente eadem *conſtructione poteſt facilius illa pars huius theorematis demonſtrari ab illis uerbis.* Et *quoniam ſicut linea α uſq; ad ea uerba,*Sed *linea α eſt poſita commenſurabilis.* Nam *lineæ γ, β, δ ſunt continue proportionales per ſecūdam partem* 17. 6. *Sed etiam α, γ, ε ſunt tres continue proportionales.* Ergo *per* 11. 5. *erit ſicut linea α ad lineam γ, ita linea β ad lineam δ.* Ergo *permutata proportione ſicut linea α ad lineam β, ita linea γ ad lineam δ &c.*

Lemma.

Si ſint tres lineæ rectæ habētes proportionem aliquam inter ſe, erit ſicut prima ad tertiam, ita parallelogrammū ex prima & media ad parallelogrammum ex media & tertia. Sint tres lineæ rectæ in aliqua proportione αβ, βγ, γδ. Dico ſicut linea



αβ ad lineam γδ, ita eſſe parallelogrammum ex αε, βγ ad parallelogrammum ex βγ, γδ. Erigatur *enim ex puncto α ſupra lineam αβ perpendicularis linea αι,*

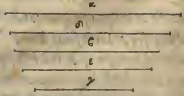


ſitq; illa α ι æqualis lineæ β γ, & à pũcto ι lineæ α δ ducatur parallela linea ι κ, & à ſingulis punctis β, γ, δ, lineæ α ι, parallelæ lineæ ducantur β ζ, γ θ, δ κ. Cúmque ſit ſicut linea α β ad lineam β γ, ita parallelogrammum α ζ ad parallelogrammum β θ, per primam ſexti. ſicut autem linea β γ ad lineã γ δ, ita parallelogrammum β θ ad parallelogrammum γ κ. Per *æquam itaque proportionem erit ſicut linea α β ad lineam γ δ, ita parallelogrammum α ζ, ad parallelogrammum γ κ. Eſt autem parallelogrammũ α ζ ex lineis α β, β γ. poſita eſt enim æqualis α ι lineæ β γ, eſtq; parallelogrammum γ κ ex lineis β γ, γ δ.* Nam *β γ eſt æqualis lineæ γ θ, quia γ θ eſt æqualis lineæ α ι per* 34.1. Ergo *ſi ſint tres lineæ rectæ &c. quod demonſtrandum erat.*

Trigeſimumſecundum Theorema.

Reperire duas lineas mediales potẽtia tantum cõmenſurabiles medialem ſuperficiem continentes, huiuſmodi ut maior plus poſsit quàm minor quadrato lineæ ſibi cõmenſurabilis longitudine.

P*roponantur tres rationales α, β, γ, potentia tantum commẽſurabiles, tales ut linea α plus poſsit quàm linea γ quadrato lineæ ſibi commẽſurabilis longitudine.* Et *parallelogrãmo ex α, β ſit æqua-*



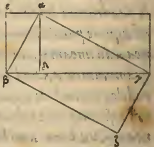
le

le quadratum lineæ δ. Parallelogrammum autem ex α,β eſt mediale, mediale ergo erit, & quadratum lineæ δ. ergo linea δ erit medialis. parallelogrammo uerò ex β,γ ſit æquale parallelogrammum ex δ,ε (quod ſit reperta quarta proportionali ad lineas δ,ϛ,γ quæ ſit linea ε.) Cum itaque ſit ſicut parallelogrammum ex α,β ad parallelogrammum ex ϛ,γ, ita linea α ad lineã γ per lemma proximũ. Sed parallelogrãmo ex α,ϛ eſt æquale quadratum lineæ δ: parallelogrammo uerò ex β,γ eſt æquale parallelogrammum ex δ,ε. Eſt ergo ſicut linea α ad lineam γ, ita quadratũ lineæ δ, ad parallelogrammum ex δ,ε. Sed ſicut quadratum lineæ δ ad parallelogrammũ ex δ,ε, ita linea δ ad lineam ε per lemma poſitum poſt 22 theorema. Ergo ſicut linea α ad lineam γ, ita linea δ ad lineam ε. Sed linea α eſt commenſurabilis potentia tantum lineæ γ. Ergo linea δ erit commenſurabilis potentia tantũ lineæ ε. Sed linea δ eſt medialis. ergo linea ε erit etiã medialis per 24 huius. Cũq; ſit ſicut linea α ad lineã γ, ita linea δ ad lineam ε. linea autem α poſſit plus quàm linea γ quadrato lineæ ſibi cõmenſurabilis longitudine. Ergo linea δ poterit plusquã linea ε quadrato lineæ ſibi commenſurabilis longitudine per 15 huius. Dico prӕterea parallelogrammum ex δ,ε eſſe mediale. Nam eſt æquale parallelogrammo ex β,γ quod eſt mediale per 22 huius. Mediale eſt ergo ſimiliter parallelogrammum ex δ,ε, Repertæ ſunt ergo duæ mediales potentia tantum commenſurabiles, nempe δ,ε &c. quod feciſſe oportuit. Rurſus eadem ratione reperientur duæ mediales potentia tantum commenſurabi-

les mediale continentes, huiuſmodi, ut maior plus poſsit quàm minor quadrato lineæ ſibi incomměſurabilis longitudine, quandocunque linea α plus poterit quàm linea γ quadrato lineæ ſibi incōměſurabilis longitudine.

Lemma.

Sit triangulum rectangulum β α γ, habens rectum angulũ α, ducatúrque perpendicularis α δ. dico primò parallelogrammum ex γ β, β δ eſſe æquale quadrato lineæ β α. dico ſecundò parallelogrammum ex β γ, γ δ eſſe æquale quadrato lineæ γ α. dico tertiò parallelogrammũ ex β δ, δ γ eſſe æquale quadrato lineæ δ α. dico quartò parallelogrammum ex β γ, α δ eſſe



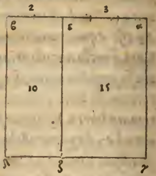
æquale parallelogrammo ex β α, α γ. Quod ad primum attinet, parallelogrãmũ ex γ β, β δ eſſe æquale quadrato lineæ β α, ita demonſtratur. Cũ ab angulo recto triãguli rectanguli ad baſim perpĕdicularis ducta ſit linea α δ. Ergo triangula α β δ, α δ γ ſunt ſimilia toti triangulo α β γ, & ipſa inter ſe per 8.6. *Et cum triangulũ α β γ ſit ſimile triangulo α β δ. ſunt igitur ambo triãgula æqualium angulorum per definitionem ſimilium figurarum.* Ergo *per* 4.6. *ſicut linea γ β ad lineã β α, ita linea β α ad lineam β δ.* Ergo *parallelogrammum ex γ β, β δ erit æquale quadrato lineæ α β per* 17.6. *Quod ad ſecũdum, parallelogrammũ ex β γ, γ δ eſſe æquale quadrato lineæ α γ, eadem ratione demonſtratur.* Nam *triangulum*

gulum α β γ eſt ſimile triangulo α δ γ. Eſt igitur ſicut linea β γ ad lineam α γ, ita linea α γ ad lineam δ γ. Ergo parallelogrammum ex β γ, γ δ eſt æquale quadrato lineæ α γ. Quod ad tertium, parallelogrammum ex β δ, δ γ eſſe æquale quadrato lineæ δ α, ita demonſtratur. Cum à recto angulo trianguli rectanguli ad baſim ducta ſit perpẽdicularis, illa perpẽdicularis eſt media proportionalis inter ſectiones baſis per corollariũ 8. theorematis libri 6. Eſt igitur ſicut linea β δ ad lineã α δ, ita α δ ad δ γ. Ergo parallelogrammũ ex ϛ δ, δ γ eſt æquale quadrato lineæ δ α. Quod ad quartum, parallelogrammum ex ϛ γ, α δ eſſe æquale parallelogrammo ex ϛ α, α γ, ita demonſtratur. Cum enim, ſicut modo dictũ eſt, triãgulum α β γ ſit ſimile triangulo α ϛ δ, & ideo æqualium angulorũ. Eſt igitur ſicut linea β γ ad lineam γ α, ita linea ϛ α ad lineam α δ per 4.6. Ergo per 16.6. parallelogrammum ex β γ, α δ eſſe æquale parallelogrammo ex β α, α γ. Dico præterea ſi compleatur parallelogrammũ rectangulum ex β γ, α δ quod ſit ι γ, compleaturq́; parallelogrammũ ex β α, α γ quod ſit α ζ. Alia ratione demonſtrabitur, parallelogrammum ι γ eſſe æquale parallelogrammo α ζ. Nam utrunque ipſorum eſt duplum trianguli α γ β, per 41.1. Et quæ unius & eiuſdem ſunt dupla, inter ſe ſunt æqualia. ergo &c.

Lemma.

Si linea recta ſcindatur in partes duas inæquales, erit ut maior portio ad minorem, ita parallelogrammum ex tota & maiore portione ad parallelogrammum ex tota & minore. Recta linea α β diuidatur in partes

duas inæquales in puncto ε, ſitq́; αε maior portio. Dico ſicut αε ad lineã εβ, ita parallelogrammũ ex βα, αε ad parallelogrammũ ex ϐα, βε.



Deſcribatur enim quadratũ lineæ αϐ quod ſit αγδϐ, & à puncto ε utrique αγ, δβ parallela ducatur εζ, manifeſtũ eſt ſicut linea αε ad lineã εβ, ita parallelogrammũ αζ ad parallelogrammũ ϐζ per primam ſexti. Eſt autem parallelogrammum αζ contentum ex lineis βα, αε. eſt enim linea αγ æqualis lineæ αβ, parallelogrammum uerò ϐζ eſt cõtentum ex lineis αβ, ϐε. Nam δϐ eſt æqualis lineæ αϐ. ſicut ergo linea αε ad lineam εϐ, ita parallelogrammum ex βα, αε, ad parallelogrammum ex αβ, ϐε. quod demonſtrandum erat.

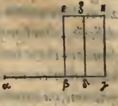
Hoc lemma nihil aliud affert quàm quod primum theorema ſexti.

Lemma.

Si ſint duæ lineæ rectæ inæquales, diuidatúrque minor in partes duas æquales, parallelogrammum ex ambabus lineis inæqualibus eſt duplum parallelogrammi ex maiore & media minoris. Quanuis hoc lemma ſit in græco exemplari poſt 33. theorema, uiſum eſt tamen hoc loco ponere, quia ſequentis theorematis 33. demonſtrationem adiuuat. Sint duæ rectæ inæquales αβ, quarum maior ſit αβ, diuidatúrque βγ bifariam in puncto δ. Dico parallelogrammum ex αϐ, βγ eſſe duplum parallelogrammi ex αβ, ϐδ. ducatur enim à puncto β ſuper lineam

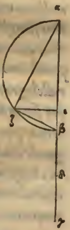
61.

lineam β γ perpendicularis β ι, ſitq́; æqualis lineæ β α, deſcribatúrq; figura ut picta eſt. Cũ igitur ſit ſicut δ β ad δ γ, ita parallelogrammum ϛ ζ ad parallelogrammum δ κ per 1.6. Compoſita ergo proportione erit ſicut tota linea ϛ γ ad lineã δ γ, ita parallelogrammũ β κ ad parallelogrammũ δ κ per 18.5. Eſt autem linea β γ dupla lineæ δ γ, ergo parallelogrammum β κ erit duplum parallelogrammi δ κ. Eſt autem parallelogrammum β κ ex lineis α ϛ, β γ. nam linea α ϛ eſt æqualis lineæ ϛ ι: parallelogrammũ uero δ κ eſt ex lineis α β, β δ. nam æqualis eſt β δ linea, lineæ δ γ: linea uerò α β lineæ δ ζ. quod demonſtrandum erat.



Trigeſimumtertium Theorema.

Reperire duas rectas potentia incommenſurabiles, quarum quadrata ſimul addita faciant ſuperficiem rationalem, parallelogrammum uerò ex ipſis contentum ſit mediale.



Proponantur duæ rationales potentia tantum commenſurabiles α β, β γ, huiuſmodi, ut maior ex illis, nempe α β, pluspoſſit, quàm minor β γ quadrato lineæ ſibi incommenſurabilis longitudine per lemma poſitũ priore loco poſt 30 theorema huius libri. Diuidatúrque linea ϛ γ biſariam & æqualiter in pũcto δ: & quadrato lineæ ϛ δ uel δ ϛ æquale ſecundum lineam α β applicetur paral-

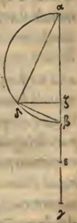
nalis, rationale eſt ergo quadratum ipſius. ergo compoſitum ex additione amborum quadratorum, nempe deſcriptorum ex lineis α ζ, ζ ϐ, quæ ſunt æqualia quadrato lineæ α β per 47. 1. erit inquam illud compoſitum rationale. Rurſum *parallelogrammũ ex α ι, ι β eſt æquale quadrato lineæ ι ζ per tertiam partem eiuſdem lemmatis.* Sed *per ſuppoſitionem idem parallelogrammum ex α ι, ι β eſt æquale quadrato lineæ β δ.* Ergo *linea ζ ι eſt æqualis lineæ ϐ δ. ergo linea β γ eſt dupla ad lineam ζ ι. Quare & parallelogrammum ex α β, β γ eſt duplũ ad parallelogrammũ ex α ϐ, ι ζ, per proximũ lemma, quod perperam poſitũ eſſe diximus in exemplari græco poſt huius theorematis demõſtrationem.* Sed *parallelogrammum ex α β, β γ eſt mediale per ſuppoſitionem & 22 theorema.* Ergo *etiam mediale erit parallelogrammum ex α β, ι ζ per corollarium 24 theorematis.* Sed. *parallelogrammum ex α β, ι ζ eſt æquale parallelogrammo ex α ζ, ζ β per quartam partem illius lemmatis poſiti poſt 32. theorema.* Ergo *parallelogrammum ex α ζ, ζ β erit mediale.* Sed *modo probatũ eſt compoſitũ ex quadratis earundem linearum α ζ, ζ β eſſe rationale.* Repertæ *ſunt ergo duæ lineæ rectæ, nempe α ζ, ζ β potentia incommenſurabiles conficientes compoſitum ex quadratis ipſarũ rationale: parallelogrammum uerò ex eiſdem cõtentũ, mediale, quod faciendum erat.*

Trigeſimumquartum Theorema.

Reperire lineas duas rectas potentia incommenſurabiles conficientes compoſitum ex ipſarũ qua-

dratis mediale, parallelogrammum uerò ex ipſis contentum rationale.

Proponantur duæ mediales potentia tantum commenſurabiles αβ, ϛγ rationale continentes parallelogrammum ex ipſis, tales inquã, ut linea αβ poſſit plus quàm linea βγ quadrato lineæ ſibi incommẽſurabilis longitudine, per poſtremam partem demõſtrationis theorematis 31. Deſcribatúrque ſuper linea αϛ ſemicirculus αδβ. diuidatur etiam linea ϛγ bifariam & æqualiter in puncto ι: & ſecundũ lineã αβ quadrato lineæ βι æquale parallelogrammum applicetur, deficiens figura quadrata quod parallelogrammum ſit ex αζ, ζβ, ut dictũ eſt in proximo theoremate. Incommenſurabilis eſt ergo longitudine linea αζ lineæ ζβ, ut ibidem dictum eſt: & à puncto ζ erigatur linea ζδ perpendicularis ſuper lineã αβ, ducantúrque lineæ αδ, δβ. Et quoniam eſt ſicut linea αζ ad lineam ζβ, ita parallelogrammum ex βα, αζ ad parallelogrammum ex βα, βζ per alterum lemma poſitum ante theorema 33. uel per primũ ſexti. Ergo per 10 huius, parallelogrammum ex βα, αζ eſt incõmenſurabile parallelogrammo ex αϛ, βζ. Sed per lemma poſitum poſt 32 theorema, parallelogrammum ex ϛα, αζ eſt æquale quadrato lineæ αδ: parallelogrammũ uerò ex αβ, ϛζ eſt item æquale quadrato lineæ βδ. Incõmenſurabile eſt ergo quadratum lineæ αδ quadrato lineæ ϛδ. Ergo lineæ αδ, δϛ ſunt potentia incommenſurabiles.



rabiles. Et quoniam quadratum lineæ αβ eſt mediale, quod eſt æquale duobus quadratis duarum linearum αδ, δβ per 47.1. Ergo compoſitum ex illis duobus quadratis linearum αδ, δβ eſt etiam mediale. Et quoniam linea βγ eſt dupla ad lineam δζ, ut probatũ eſt in proximo theoremate. Ergo parallelogrammum ex αβ, βγ erit duplum ad parallelogrammum ex αβ, δζ per lemma poſitum ante 33 theorema, uel per primam ſexti, quare & eidem erit commenſurabile per 6 huius. Sed per poſitionem parallelogrammum ex αβ, βγ eſt rationale. ergo parallelogrammum ex αβ, δζ eſt etiam rationale. parallelogrammo uerò ex αε, δζ æquale eſt parallelogrammum ex αδ, δβ per tertiam partem lemmatis poſiti poſt 32 theorema. quare parallelogrammũ ex αδ, δβ erit etiam rationale. Repertæ ſunt ergo duæ lineæ rectæ, nẽpe αδ, δβ potentia incõmẽſurabiles &c. quartam

Trigeſimumquintum Theorema.

Reperire duas lineas rectas potentia incommenſurabiles, conficientes id quod ex ipſarum quadratis componitur mediale, ſimúlque parallelogrammum ex ipſis cõtentũ, mediale, quod præterea parallelogrammum ſit incommenſurabile compoſito ex quadratis ipſarum.

Proponantur duæ mediales potentia tantum commenſurabiles αβ, εγ mediale continentes, tales inquam, ut αε plus poſſit quàm βγ quadrato lineæ ſibi incommenſurabilis longitudine, per poſtremam partem demonſtrationis theorematis 32. Deſcribatúrque ſuper linea αε

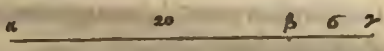
huius. quare & quadratum lineæ αβ erit incommenſurabile parallelogrammo ex αβ,βε per primum ſexti & 10 huius. Sed quadrato lineæ αε eſt æquale compoſitum ex quadratis linearum αδ,δβ. parallelogrammo uerò ex αβ,βε eſt æquale parallelogrammũ ex αβ,ζδ, hoc eſt parallelogrammum ex αδ,δβ. Nam parallelogrammũ ex αβ,ζδ eſt æquale parallelogrammo ex αδ,δε. Incommenſurabile eſt ergo compoſitum ex quadratis linearum αδ,δε parallelogrammo ex eiſdem lineis αδ,δε. Repertæ ſunt ergo duæ rectæ nempe αδ,δε potentia incommenſurabiles &c.

Principium ſenariorum per compoſitionem.

Trigeſimumſextum Theorema.

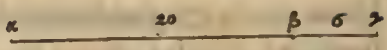
Si duæ rationales potentia tantum commenſurabiles cõponantur, tota linea erit irrationalis. Vocetur autem Binomium.

Componantur duæ rationales potentia tantum commenſurabiles αβ,εγ, quales reperire docet 11 huius.



Dico totam lineam αγ eſſe irrationalem. Cum enim ſit incommenſurabilis longitudine linea αβ, lineæ εγ, poſitæ ſunt enim potentia tantum commenſurabiles: cúmque ſit ſicut linea αε ad lineã βγ, ita parallelogrãmum ex αε,εγ ad quadratum εγ per 1.6. Incommenſurabile eſt ergo parallelogrammum ex αε,εγ quadrato lineæ βγ per 10 huius. Sed parallelogrammo ex αε,εγ commenſurabile eſt id quod fit bis ex αε,βγ per 6. huius. Ergo id quod fit bis ex αε,βγ eſt incommenſurabi-

le quadrato lineæ β γ per 14 huius. Quadrato autem lineæ ζ γ eſt commenſurabile compoſitũ ex quadratis linearum α β, ζ γ per 16 huius, quia per ſuppoſitionem lineæ α β, ζ γ ſunt potentia tantum commen ſurabiles. Ergo *per* 14 *compoſitum ex quadratis linearum α β, ζ γ eſt incommenſurabile ei quod fit bis ex α β, ζ γ.* Ergo *per* 17 *id quod fit bis ex α ζ, ζ γ cum quadratis linearum α ζ, ζ γ, quod eſt æquale quadrato totius lineæ α γ per* 4.2. *eſt incommenſurabile cõpoſito ex quadratis linearum α ζ, ζ γ.* Sed *compoſitũ ex quadratis linearum α ζ, β γ eſt rationale, quia eſt commenſurabile alterutri quadrato linearum α β, ζ γ, quorum utrũque eſt rationale per poſitionem.* Ergo *quadratum lineæ α γ eſt irrationale, quare & linea α γ erit irrationalis.* Vo*cetur autem linea illa* Binomium. *Hic autem & in cæteris deinceps denominationibus linearum irrationalium, nihil innouandum cenſuimus de uocibus tritis & iamdudum inter latinos geometras receptis, niſi ſi quãdo ratio contrarium ſuaſerit.*



Trigeſimumſeptimum Theorema.

Si duæ mediales potentia tantum commenſurabiles rationale continentes cõponantur, tota linea eſt irrationalis. Vocetur autem bimediale prius.

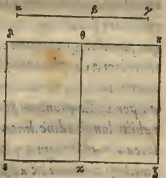
Componantur duæ mediales potentia tantum commenſurabiles α ζ, ζ γ rationale continentes (quales reperire docet 28) dico totam lineam α γ eſſe irrationalem. ſicut enim dictum



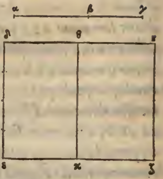
dictum eſt in proximo theoremate, compoſitum ex quadratis linearum α ϐ, ϛ γ eſt incommenſurabile ei quod fit bis ex α ϐ, ϐ γ. Ergo per 17 huius, compoſitum ex quadratis linearum α ϛ, ϐ γ cum eo quod fit bis ex α ϛ, ϐ γ, quod eſt æquale quadrato totius lineæ α γ, eſt incommenſurabile ei quod fit bis ex α ϐ, ϛ γ. Sed id quod fit bis ex α ϛ, ϛ γ eſt commenſurabile ei quod fit ſemel ex α ϛ, ϛ γ per 6 huius. Ergo quadratum totius lineæ α γ eſt incommenſurabile ei quod fit ſemel ex α ϛ, ϛ γ per 14 huius. Sed per poſitionem id quod fit ſemel ex α ϛ, ϛ γ eſt rationale. Ergo quadratum totius lineæ α γ eſt irrationale. Irrationalis eſt ergo tota linea α γ. Vocetur autem Bimediale prius.

Trigeſimumoctauum Theorema.

Si duæ mediales potentia tantum commenſurabiles mediale continentes componantur, tota linea eſt irrationalis, uocetur autem Bimediale ſecundum.



Componantur duæ mediales potentia tantum commenſurabiles α ϛ, ϛ γ mediale continentes (quales docet reperire 29.) Dico totam lineã α γ eſſe irrationalem. Proponatur enim linea rationalis δ ι, & quadrato lineæ α γ æquale ſecundum lineam δ ι applicetur parallelogrã-mum δ ζ, cuius alterũ latus



ſit δκ. Cum quadratū lineæ αγ ſit æquale quadratis linearum αβ, βγ. & ei quod fit bis ex αβ, βγ per 4.2. *applicetur ſecundum lineā δε quadratis linearum αβ, βγ æquale parallelogrammum εθ. Reſiduum ergo parallelogrammum ζθ, eſt æquale ei quod fit bis ex αβ, βγ. Sed poſitū eſt parallelogrammū ex αβ, βγ eſſe mediale, cui id quod fit bis ex αβ, βγ eſt commenſurabile per 6 huius.* Ergo *per corollarium* 24 *theorematis id quod fit bis ex αβ, βγ eſt etiam mediale.* Eſt *autem parallelogrammum εθ æquale quadratis linearum αβ, βγ, quæ quadrata ſunt inter ſe commenſurabilia ex ſuppoſitione.* Ergo *per* 16 *huius, parallelogrammum εθ erit commenſurabile utrique quadrato lineæ αβ, & lineæ βγ. Sed illa quadrata ſunt medialia, quia ex poſitione lineæ αβ, βγ ſunt mediales.* Ergo *per corollarium* 24 *theorematis parallelogrammū εθ erit etiam mediale.* Ei *uerò quod fit bis ex αβ, βγ æquale eſt reſiduum parallelogrammū θζ.* Mediale *eſt ergo utrūque parallelogrammum εθ, θζ, & ſecundum lineam rationalem δε applicantur.* Rationalis *eſt ergo utraq; linearum δθ, θκ, & incommēſurabilis longitudine lineæ δε, per* 23. Et *quoniam per poſitionem eſt incommenſurabilis longitudine linea αβ, lineæ βγ: eſt autem ſicut linea αβ ad lineam βγ, ita quadratum lineæ αβ ad parallelogrammum ex αβ, βγ per* 1.6: *incommenſurabile*

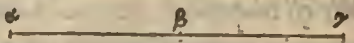
eſt

eſt ergo quadratum lineæ αβ parallelogrammo ex αβ, βγ per 10 huius. Sed quadrato lineæ αβ eſt commenſurabile compoſitũ ex quadratis linearum αβ, ϐγ per 16, quia quadrata linearum αβ, ϐγ ſunt commẽſurabilia, cum lineæ αϐ, ϐγ poſitæ ſint potentia tantum commenſurabiles. Ergo compoſitum ex quadratis linearum αϐ, ϐγ eſt incommenſurabile parallelogrammo ex αϐ, βγ per 14. Parallelogrammo uero ex αϐ, ϐγ commenſurabile eſt id quod fit bis ex αβ, βγ. Ergo per idẽ 14 theorema incommenſurabile eſt compoſitum ex quadratis linearũ αβ, βγ ei quod fit bis ex αϐ, ϐγ. Ergo eis æqualia parallelogramma ιθ, θζ ſunt etiam inter ſe incommenſurabilia. quare & linea δθ lineæ θκ eſt incommẽſurabilis lõgitudine per 1.6 & 10 huius. Sed modo probatum eſt eas eſſe rationales. lineæ ergo δθ, θκ ſunt rationales potentia tantum commẽſurabiles: quare & linea δκ eſt irrationalis per 36 huius. Sed parallelogrammum δζ contentum ex linea irrationali δκ, & rationali δι eſt ipſum etiam irrationale. nam ſi eſſet rationale cum applicetur ſecundum lineam rationalem puta δι, eſſet & altera linea nempe δκ etiam rationalis per 21. cum tamen probata ſit irrationalis. Irrationale eſt ergo parallelogrammum δζ. quare & linea quæ illud parallelogrammum poteſt, nempe αγ, eſt etiam irrationalis. Vocetur autem Bimediale ſecundum. Vocauit autem illam eo nomine, quia mediale eſt non rationale quod continetur ex illis medialibus lineis αϐ, βγ, quarum compoſitione fit linea αγ. Poſterius eſt autem & natura & cognitione mediale rationali.

Trigeſimumnonum Theorema.

Si duæ rectæ potentia incommenſurabiles componantur, conficientes compoſitum ex quadratis ipſarum rationale, parallelogrammum uerò ex ipſis contentum mediale, tota linea recta eſt irrationalis. Vocetur autem linea maior.

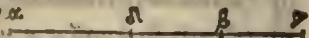
Componantur enim duæ rectæ potentia incommenſurabiles α ϐ, β γ conficiẽtes id quod dicitur in theoremate (quales docet reperire 33.) Dico totãm lineã α γ *eſſe irrationalem.* Nam *parallelogrammum ex α ϐ, β γ eſt mediale: & quod fit bis ex α ϐ, β γ eſt commenſurabile ei quod fit ſemel ex α ϐ, β γ per 6 huius.* Ergo per *corollarium 24 huius, quod fit bis ex α ϐ, β γ erit mediale. Sed per poſitionem compoſitum ex quadratis linearum α ϐ, β γ eſt rationale.* Ergo *id quod fit bis ex α ϐ, β γ eſt incommenſurabile compoſito ex quadratis linearũ α ϐ, β γ.* Quare *per 17 compoſitum ex quadratis linearum α ϐ, β γ cum eo quod fit bis ex α ϐ, β γ eſt incommẽſurabile compoſito ex quadratis linearum α ϐ, β γ. Sed compoſitum ex quadratis linearũ α ϐ, β γ cum eo quod fit bis ex α ϐ, ϐ γ eſt æquale quadrato totius lineæ α γ per 4.2. Compoſitũ uerò quod fit ex quadratis linearũ α ϐ, ϐ γ eſt rationale per poſitionem.* Ergo *quadratũ totius lineæ α γ eſt irrationale. ergo tota linea α γ eſt etiã irrationalis. Vocetur autem linea maior. Vocauit autẽ ideo maiorem, quia compoſitum ex quadratis linearũ α ϐ, ϐ γ quæ ſunt rationalia, eſt maius eo quod fit bis ex*



α β,β γ ut modo dicemus. Et ſane decet fieri denominationem à conuenientia rationalium.

Lemma.

Quod autem compoſitum ex quadratis linearum α β,β γ ſit maius eo quod fit bis ex α β, β γ,ita demõſtretur. Primò manifeſtum eſt lineas α β,β γ eſſe inæquales. Nam ſi æquales eſſent,æqualia quoque eſſent quadrata linearũ α β, β γ ei quod fieret bis ex α β,β γ. itaque ambo, compoſitũ inquam ex quadratis linearum α β,β γ, & id quod ex illis continetur, eſſent ſimul aut medialia aut rationalia, quod eſt cõtra poſitionem. Ergo inæquales ſunt lineæ α β,β γ. Sit autem per ſuppoſitionem maior linea α β: ſit autẽ æqualis linea β δ lineæ β γ. Ergo per 7.2. quadrata linearũ α β,β δ ſunt æqualia ei quod fit bis ex α β, β δ, & quadrato lineæ δ α. Eſt autem æqualis δ β lineæ β γ. Ergo quadrata linearum α β, β γ ſunt æqualia ei quod fit bis ex α β,β γ, & quadrato lineæ δ α. Quare quadrata linearum α β,β γ ſunt maiora quàm id quod fit bis ex α β,β γ,tanto quantũ eſt quadratũ lineæ δ α.



Quadrageſimum Theorema.

Si duæ rectæ potentia incommenſurabiles componantur conficientes compoſitũ ex ipſarum quadratis mediale: id uerò quod fit ex ipſis rationale,tota linea eſt irrationalis. Vocetur autem potens rationale & mediale.

Componantur duæ rectæ potentia incommẽſurabiles α β, β γ conficientes id quod dicitur in theoremate (quales

reperire docet 34.) Dico totam lineam αγ eſſe irrationalem. Cum enim cõpoſitum ex quadratis linearum αβ, βγ ſit mediale: id uerò quod fit bis ex αβ, βγ ſit rationale. Incommenſurabile eſt ergo compoſitum ex quadratis linearũ αβ, ϐγ ei quod fit bis ex αβ, ϐγ. Ergo per 17 compoſitum ex quadratis linearũ αϐ, ϐγ unà cum eo quod fit bis ex αβ, βγ, quod eſt quadratũ totius αγ, eſt incommẽſurabile ei quod fit bis ex αβ, ϐγ. Sed id quod fit bis ex αβ, ϐγ eſt rationale, quia id quod continetur ex αβ, ϐγ poſitum eſt eſſe rationale. Ergo irrationale eſt quadratum totius lineæ αγ, quare & ipſa linea αγ erit irrationalis. Vocetur autẽ potens rationale & mediale. Quam ideo ſic uocauit, quia poteſt duas ſuperficies, aliam quidẽ rationalem, aliam uerò medialem. Et quia rationale præcedit ordine naturæ & cognitionis, prius intulit mentionẽ ipſius rationalis. Sciendum eſt has rationes denominationum quæ ſunt in 38. 39. & hoc theoremate, item in 41 eſſe additiones, quæ tamẽ ut in nonnullis conueniãt hæc certe nõ ſatisfacit.



Quadrageſimumprimum Theorema.

Si duæ rectæ potentia incommenſurabiles componantur conficientes compoſitũ ex quadratis ipſarum, mediale & quod continetur ex ipſis mediale, & præterea incommenſurabile compoſito ex quadratis ipſarum, tota linea eſt irrationalis. Vocetur autem potens duo medialia.

Componantur duæ rectæ potentia incommẽſurabiles αϐ,

βγ



ϐγ conficiẽtes id quod dicitur in theoremate (quales docet reperire 35.*) Dico totam lineam αγ eſſe irrationalem. Proponatur linea rationalis λι, & ſecũdum illã quadratis linearum αϐ, ϐγ æquale parallelogrammum λζ applicetur. Item ſecundum eandem lineam λι uel ei æqualem κζ ac æquale ei quod fit bis ex αϐ, ϐγ parallelogrammum κθ applicetur: totum ergo parallelogrammum λθ eſt æquale quadrato lineæ αγ per* 4. 2. *Et quoniam cõpoſitum ex quadratis linearum αϐ, ϐγ eſt mediale cui eſt æquale parallelogrammũ λζ. Ergo mediale erit etiã λζ per ea quæ ſcripſimus in demonſtratione* 38 *theorematis. ergo linea λκ eſt rationalis & incommenſurabilis longitudine lineæ λι per* 23. *Eadẽ ratione linea κϰ erit rationalis & incommenſurabilis longitudine eidẽ lineæ λι. Et quoniam compoſitum ex quadratis linearum αϐ, ϐγ eſt incommenſurabile ei quod fit bis ex αϐ, ϐγ: ergo etiam incommenſurabile erit parallelogrammum λζ parallelogrammo θκ. Quare & linea λκ lineæ κϰ erit incommenſurabilis per* 1.6. *&* 10 *huius. Sed modo probatum eſt illas eſſe rationales: ſunt ergo lineæ λκ, κϰ rationales potentia tantum cõmenſurabiles. ergo tota linea λϰ eſt irrationalis quæ uocatur* Binomiũ *per* 36. *Sed linea λι eſt rationalis. ergo parallelogrammum λθ eſt irrationale per id quod probatum eſt in fine* 38.

Ergo linea potens illud parallelogrammum nempe αγ erit irrationalis. Vocetur autē potēs duo medialia. Hæc uerò uocauit hoc nomine, quia poteſt duas ſuperficies mediales, & eam quæ componitur ex quadratis linearum αβ, βγ, & eam quæ fit ex αβ, βγ. Quod uerò dictæ irrationales lineæ unico modo, id eſt uno tantum in puncto diuiduntur in rectas lineas ex quibus componũtur, & quæ conſtituunt ſingulas ſpecies illarũ irrationalium, mox demonſtrabimus, ſi prius demonſtrauerimus huiuſmodi lemma.

Lemma.

Proponatur recta linea αβ, diuidatúrque in partes inæquales duas in puncto γ, iterúmq; diuidatur eadem linea αβ in partes duas inæquales in alio puncto δ. Sit



autem linea αγ maior quàm linea δβ. Dico compoſitum ex quadratis duarum linearum αγ, γβ eſſe maius quàm compoſitum ex quadratis αδ, δβ. Diuidatur enim bifariam & æqualiter linea αβ in puncto ε. & quoniam linea αγ eſt maior linea δβ, auferatur ab utraque ea pars quæ utriuſque eſt communis nempe δγ. Reſidua ergo linea αδ eſt maior reſidua linea γβ. Quia de duabus lineis inæqualibus quarum maior erat αγ, idem ablatum eſt nempe δγ. Eſt autem æqualis linea αε lineæ εβ. Ergo linea δε eſt minor linea εγ. ergo puncta γ, δ, non æqualiter diſtant à puncto ε, quod eſt punctum ſectionis in partes duas æquales. Et quoniam parallelogrammum contentum ex αγ, γβ cum quadrato lineæ γε eſt æquale quadrato lineæ εβ per 5.2.

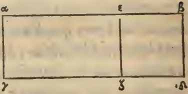
&

& eadem ratione parallelogrammum contentum ex α δ, δ β unà cum quadrato lineæ δ ε eſt æquale eidem quadrato eiuſdem lineæ ε β. Ergo parallelogrammum contentum ex α γ, γ β unà cum quadrato lineæ γ ε eſt æquale parallelogrammo ex α δ, δ β unà cum quadrato lineæ δ ε, quia quæ ſunt æqualia uni tertio ſunt æqualia inter ſe. Sed quadratū lineæ δ ε eſt minus quadrato lineæ ε γ, quia linea δ ε eſt probata minor linea ε γ. Ergo & reſiduum nempe parallelogrammum ex α γ, γ β eſt minus parallelogrammo ex α δ, δ β. quare & id quod fit bis ex α γ, γ β eſt minus eo quod fit bis ex α δ, δ β. Sed per 4. 2 quadratum totius lineæ α β eſt æquale compoſito ex quadratis linearum α γ, γ β unà cum eo quod fit bis ex α γ, γ β, & eadem ratione. Idem quadratum totius lineæ α β eſt æquale compoſito ex quadratis linearum α δ, δ β unà cum eo quod fit bis ex α δ, δ β. Ergo compoſitum ex quadratis linearum α γ, γ β unà cum eo quod fit bis ex α γ, γ β eſt æquale compoſito ex quadratis linearum α δ, δ ζ unà cum eo quod fit bis ex α δ, δ ζ. Sed modo probatū eſt id quod fit bis ex α γ, γ β eſſe minus eo quod fit bis ex α δ, δ β. Reſiduum ergo nempe compoſitum ex quadratis linearum α γ, γ ζ eſt maius reſiduo nempe compoſito ex quadratis linearum α δ, δ β, quod erat demonſtrandum.

Lemma.

Rationale excedit rationale ſuperficie rationali.

Sit rationale α δ excedēs aliud rationale α ζ, ſuperficie ε δ. Dico ſuperficiem ε δ eſſe etiam rationalem. Nam pa-



rallelogrammũ α δ eſt commẽſurabile parallelogrammo α ζ. Ergo per ſecundam partẽ 16 huius, parallelogrammũ α ζ eſt commẽſurabile parallelogrammo ε δ. Sed parallelogrammum α ζ eſt rationale. Ergo etiam parallelogrammum ε δ eſt rationale.

Quadrageſimumſecundum Theorema.

Binomium in unico tantũ puncto diuiditur in ſua nomina, id eſt in lineas ex quibus componitur.

Sit binomium linea α β diuiſa in puncto γ in ſua nomina, hoc eſt in lineas ex quibus linea tota α β cõponitur. Ergo lineæ α γ, γ β ſunt rationales potentia tantum commẽſurabiles per 36. Dico lineam α β non poſſe diuidi in ullo alio puncto quàm γ, in alias lineas duas rationales potentia tantum commenſurabiles. Nam ſi contradicatur, diuidatur in pũcto δ, ita ut lineæ α δ, δ β ſint duæ rationales potentia tantum commenſurabiles. Primò conſtat neutrum illorum punctorum γ, δ diuidere lineã α β in partes æquales, alioquin eſſent lineæ α γ, γ β, rationales longitudine cõmenſurabiles, ſimiliter & lineæ α δ, δ β. Quælibet enim linea ſeipſam metitur & quãcunque aliam ſibi æqualem. Præterea linea δ β uel eſt eadem cũ linea α γ, hoc eſt æqualis lineæ α γ, uel eadem maior, uel minor eadem. Si eſt æqualis linea δ β lineæ α γ, impoſita ergo linea δ β lineæ α γ ſingulæ extremitates unius



tribuunt

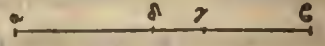
tribuũt cũ ſingulis extremitatibus alterius. Poſito itaque puncto β ſuper puncto α, punctum etiam δ incidet ſuper punctum γ, & reſidua linea α δ ex linea α γ erit etiam æqualis lineæ γ β reſiduæ ex δ ϐ. Ergo linea α β diuiditur in puncto γ, in ſua nomina. Sic itaque linea α β diuiſa per punctum δ, diuiſa erit, in eodem puncto quo fuerat prius diuiſa eadem linea α ϐ per punctũ γ, quod eſt contra hypotheſin contradicentis. nam ex poſitione erat diuiſa aliter atque aliter in punctis γ, δ. Quòd ſi linea δ ϐ eſt maior quàm linea α γ, diuidatur linea α β bifariam & æqualiter in puncto ι. non itaque puncta γ, δ æqualiter diſtabunt à puncto ι. Sed per lemma modo poſitum poſt 41, compoſitum ex quadratis linearum α δ, δ β eſt maius compoſito ex quadratis linearum α γ, γ ϐ: & compoſitum ex quadratis linearum α δ, δ ϐ unà cum eo quod fit bis ex α δ, δ β eſt æquale compoſito ex quadratis linearum α γ, γ β, unà cum eo quod fit bis ex α γ, γ β. quia utrunque eſt æquale quadrato totius lineæ α β per 4.2. Ergo quanto compoſitum ex quadratis linearum α δ, δ β eſt maius cõpoſito ex quadratis linearũ α γ, γ β, tanto id quod fit bis ex α γ, γ β eſt maius eo quod fit bis ex α δ, δ β. Quod ipſum quãuis ſit indemonſtrabile, modica tamen inductione fit manifeſtius, ſi duabus lineis æqualibus propoſitis, puta quatuor pedes longis, ab altera pedes tres abſtuleris, ab altera pedes duos. Reſiduum eius à qua pedes duos abſtuliſti, eſt maius quàm reſiduum eius à qua pedes tres abſtuliſti pede uno. quãtò ſcilicet maiores erant pedes tres ablati quã pedes duo ablati. Sed compoſitum ex quadratis linearum α δ, δ β

excedit compoſitum ex quadratis linearum α γ,γ β ſuperficie rationali per lemma poſitum ante hoc theorema. Sunt enim utraq; compoſita rationalia, quia lineæ α δ,δ β,ſunt poſitæ rationales potentia tantum cõmenſurabiles,ſimiliter & lineæ α γ,γ ε. Ergo etiam id quod fit bis ex α γ,γ ε excedit id quod fit bis ex α δ,δ ε ſuperficie rationali, cum ſint tamẽ ambo medialia per 22 huius, quod eſt impoſsibile per 27. Quòd ſi linea δ ε eſt minor linea α γ, eadem uia deducitur ad idem impoſsibile. Non igitur binomium diuidetur aliter atque aliter in ſua nomina, ſed unico tantum modo. Qui defendebant unitatem entis ex opinione Parmenidis, exiſtimauerunt eſſe quaſdã lineas inſecabiles, de quibus ageretur hoc theoremate & cæteris ſequentibus, quam tamen illorum opinionem Ariſtoteles in libello περὶ ἀτόμων γραμμῶν, ſeu quis alius author eius opuſculi, falſam eſſe arguit, & peruerſe ab illis intellectũ hoc theorema.

Quadrageſimumtertium Theorema.

Bimediale prius in unico tantum puncto diuiditur in ſua nomina.

Sit bimediale prius linea α β, diuiſa in puncto γ, ita ut lineæ α γ,γ ε ſint mediales potentia tantum commenſurabiles, rationale continentes.



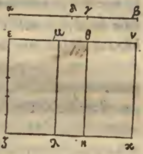
Dico lineam α β non poſſe diuidi in alio puncto quàm γ in ſua nomina. Quod ſi cõtradicatur, diuidatur in puncto δ, ita ut α δ,δ β ſint mediales potentia tantum commenſurabiles rationale continẽtes. Cum igitur tanto differat id quod fit bis ex

α δ,

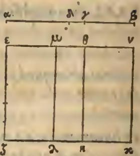
α δ, δ β, ab eo quod ſit bis ex α γ, γ ζ, quanto differt compoſitum ex quadratis linearum α γ, γ ζ, à compoſito ex quadratis linearum α δ, δ ζ, & quod ſit bis ex α δ, β δ differat ab eo quod ſit bis ex α γ, γ ζ, ſuperficie rationali, ſunt enim ambo rationalia. Ergo *& cõpoſitũ ex quadratis linearum α γ, γ β differt à compoſito ex quadratis linearum α δ, δ β mediale inquam à mediali ſuperficie rationali quod eſt impoßibile.* Non *igitur bimediale prius aliter atque aliter diuiditur in ſua nomina, ergo unico tantum modo.*

Quadrageſimumquartum Theorema.

Bimediale ſecundum in unico tantum puncto diuiditur in ſua nomina.



Sit Bimediale *ſecundum linea α ζ diuiſa in puncto γ, ita ut lineæ α γ, γ ζ ſint mediales potentia tantum cõmẽſurabiles, mediale continentes.* Manifeſtũ *eſt igitur punctum γ non ſecare totam lineam α β bifariã & æqualiter, quia lineæ α γ, γ β non ſunt longitudine inter ſe commenſurabiles.* Dico *lineam α β non poſſe diuidi aliter quàm in pũcto γ, in ſua nomina.* Quòd *ſi contradicatur, diuidatur in puncto δ, ita ut linea α γ ne ſit eadem, hoc eſt ne ſit æqualis lineæ δ β, ſed ea maior. lineæ autẽ α δ, δ β ſint mediales potentia tantum commenſurabiles mediale continentes per te.* Manifeſtum *eſt primo quadrata linearũ α γ, γ ζ eſſe maiora*



quadratis linearũ α δ, δ β per lemma poſitum ante 42. Proponatur linea rationalis ε ζ, & quadrato lineæ α ϛ æquale ſecundum lineã ε ζ applicetur parallelogrammum ε κ. Ex quo parallelogrammo detrahatur id quod æquale eſt quadratis linearum α γ, γ ϛ, puta parallelogrammum ε ν. Reſiduum ergo, nempe parallelogrammum θ κ eſt æquale ei quod fit bis ex α γ, γ ϛ. Rurſus quadratis linearũ α δ, δ ϛ quæ ſunt minora quadratis linearum α γ, γ ϛ æquale detrahatur parallelogrammum ε λ. Reſiduum ergo parallelogrammum μ κ, eſt æquale ei quod fit bis ex α δ, δ β. Et quoniam quadrata linearum α γ, γ ϛ ſunt medialia, ergo parallelogrammum ε κ erit etiam mediale, & ſecũdum lineã rationalẽ ε ζ applicatur rationalis. Eſt ergo linea ε θ ✠ incommẽſurabilis longitudine lineæ ε ζ. Eadem ratione quia parallelogrammum θ κ eſt mediale. (nam id quod eſt ei æquale, nempe quod fit bis ex α γ, γ β eſt mediale.) Ergo linea θ ν eſt rationalis & incommenſurabilis longitudine lineæ ε ζ. Et quoniam lineæ α γ, γ ϛ ſunt mediales potentia tantum commenſurabiles, ergo ſunt longitudine incommẽſurabiles. Sed ſicut linea α γ ad lineã γ β, ita quadratũ lineæ α γ ad parallelogrammum ex α γ, γ β per. 1. 6. ergo quadratum lineæ α γ eſt incommenſurabile parallelogrammo ex α γ, γ β. Sed quadrato lineæ α γ eſt commenſurabile compoſitum ex quadratis linearum α γ, γ β per 16. quia lineæ

α γ,

α γ, γ β ſunt potentia inter ſe commenſurabiles. parallelogrammo uerò ex α γ, γ β eſt commenſurabile id quod fit bis ex α γ, γ ϛ. Ergo compoſitum ex quadratis linearũ α γ, γ ϛ eſt incommenſurabile ei quod fit bis ex α γ, γ ϛ, per corollarium à nobis additum theoremati 14. *Sed cõpoſito ex quadratis linearum α γ, γ ϛ eſt æquale parallelogrammũ ι κ, ei uerò quod fit bis ex α γ, γ β eſt æquale parallelogrammum θ κ.* Incommenſurabile *eſt ergo parallelogrammum ι κ parallelogrammo θ κ. quare & linea ι θ, erit incommenſurabilis longitudine lineæ θ ν. ſunt autem ambæ rationales. Sunt ergo illæ lineæ ι θ, θ ν rationales potentia tantum commenſurabiles, per lemma poſitũ poſt* 19 *theorema.* Nam *eo ipſo quod ſunt rationales ſunt potentia ſaltem commẽſurabiles.* Ergo *tota linea ι ν erit binomiũ per* 36. *quæ diuiſa eſt in puncto θ, in ſua nomina.* Eadem *uia demonſtrabitur lineas ι μ, μ ν eſſe rationales potentia tantum commenſurabiles.* Ergo *linea ι ν quæ eſt binomium, in alio atque alio puncto nempe θ, μ, diuiditur in ſua nomina quod eſt impoſſibile per* 42. Q*uòd ſi quis dicat poſſe fieri ut linea ι θ ſit eadem hoc æqualis lineæ μ ν, itaque nihil cõſequi impoſſibile, neque lineam ι ν quæ eſt binomiũ diuidi in ſua nomina alio, atque alio puncto, ſed in uno tantum. hoc etiam demonſtrabimus, nempe lineam ι θ nõ eſſe eandẽ, hoc eſt æqualem lineæ μ ν.* Nam *quadrata linearũ α γ, γ ϛ, ſunt maiora quadratis linearum α δ, δ ϛ per lemma poſitum poſt* 41. *Sed quadrata linearũ α δ, δ β ſunt maiora eo quod fit bis ex α δ, δ β, per lemma poſitũ poſt* 39. Ergo *multo maiora ſunt quadrata linearũ α γ, γ ϛ, hoc*

eſt illis æquale parallelogrammū ι κ eſt maius eo quod fit bis ex α δ, δ β hoc eſt, quàm parallelogrammum μ κ, quod eſt æquale ei quod fit bis ex α δ, δ β. Ergo per 1.6. Linea etiam ι θ erit maior quàm linea μ ν. Ergo linea ι θ non erit eadem cum linea μ ν. Quod ſi poſueris ab initio lineam α γ eſſe minorem linea δ β. Idem etiam tunc impoſsibile conſequetur, hoc eſt lineam ι ν quæ eſt binomiū diuidi in ſua nomina alio atque alio puncto. Non igitur bimediale ſecundum in alio atque alio puncto diuiditur in ſua nomina, ergo in uno tantum.

Quadrageſimumquintum Theorema.

Linea maior in unico tantum puncto diuiditur in ſua nomina.



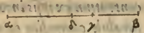
Sit linea maior α β diuiſa in puncto γ, ita ut α γ, γ β ſint potentia incommenſurabiles conficiētes compoſitum ex quadratis linearum α γ, γ ϐ, rationale, contentū uero ex ipſis parallelogrammum mediale. Dico lineam α β non poſſe diuidi in ſua nomina alibi quàm in puncto γ. Quòd ſi contradicatur, diuidatur in puncto δ in ſua nomina. Et quoniam quanto differt compoſitum ex quadratis linearum α γ, γ β à compoſito ex quadratis linearū α δ, δ ϐ, tanto differt id quod fit bis ex α δ, δ β ab eo quod fit bis ex α γ, γ β per ea quæ ſcripſimus in demonſtratione 42 theorematis. Sed compoſitum ex quadratis linearū α γ, γ ϐ excedit compoſitum ex quadratis linearum α δ, δ ϐ, ſuperficie rationali. Sunt enim ambo rationalia. Ergo & id quod fit bis ex α δ, δ β excedet id quod fit bis

ex

ex α γ, γ β ſuperficie rationali, ſed illa ſunt medialia. Er*go mediale excedet mediale ſuperficie rationali, quod eſt impoſsibile per 27. Non igitur linea maior diuiditur aliter atq; aliter in ſua nomina, ergo in uno tantũ puncto diuidetur.*

Quadrageſimumſextum Theorema.

Linea potens rationale & mediale in unico tantum puncto, diuiditur in ſua nomina.



Sit linea potens rationale & mediale α β, diuiſa in puncto γ, ita ut lineæ α γ, γ β ſint potentia incommenſurabiles conficientes compoſitum ex quadratis linearum α γ, γ β mediale: id autem quod cõtinetur ex α γ, γ β rationale. Dico lineam α ϐ in alio puncto quàm γ non poſſe diuidi in ſua nomina. Quòd ſi contradicatur, diuidatur in puncto δ, in ſua nomina: Cũ igitur quanto differt id quod fit bis ex α δ, δ β ab eo quod fit bis ex α γ, γ β, tanto differat compoſitum ex quadratis linearum α γ, γ ϐ à compoſito ex quadratis linearum α δ, δ β, id autem quod fit bis ex α γ, γ β excedat id quod fit bis ex α δ, δ ϐ, ſuperficie, rationali quia utrunque eſt rationale. Ergo *& compoſitum ex quadratis linearum α γ, γ ϐ excedit compoſitum ex quadratis linearum α δ, δ ϐ ſuperficie rationali, cum tamẽ utrunque illorum ſit mediale. Quod eſt impoſsibile.* Non *igitur linea potens rationale & mediale diuiditur aliter atque aliter in ſua nomina.* Ergo *diuiditur tantum in puncto uno.*

Quadrageſimumſeptimum Theorema.

V

Linea potens duo medialia in unico tantum puncto diuiditur in ſua nomina.

Sit linea potens duo medialia α β, diuiſa in puncto γ, ita ut lineæ α γ, γ β ſint potẽtia incommenſurabiles conficientes compoſitum ex quadratis linearum α γ, γ β mediale: ſimiliter & quod continetur ex ipſis mediale, item contentum ex ipſis incommẽſurabile compoſito ex quadratis ipſarum α γ γ β. Dico



lineam α β non poſſe diuidi in alio puncto, quàm γ in ſua nomina. Quòd ſi contradicatur, diuidatur in puncto δ, ita ut lineæ α δ, δ β conficiant ea quæ lineæ α ſ, γ β. Sitq́; rurſus ex ſuppoſitione linea α γ maior linea δ β. Sit autem rationalis linea ι ζ, ſecundum quam applicetur parallelogrammum ι η æquale quadratis linearum α γ, γ β. ei uerò quod fit bis ex α γ, γ β æquale applicetur θ κ. Totum ergo parallelogrammum ι κ eſt æquale quadrato lineæ α β. Rurſus ſecundum eandem lineam ι ζ applicetur æquale quadratis linearum α δ, δ β parallelogrammum ι λ. Reſiduum ergo parallelogrammũ μ κ eſt æquale reſiduo, nempe ei quod fit bis ex α δ, δ β. Et quoniam ex ſuppoſitione compoſitum ex quadratis linearũ α ſ, γ β eſt mediale. Eſt ergo parallelogrammũ illi æquale, nempe ι η: etiam mediale & ſecũdum lineam rationalem ι ζ applicatur. Ergo linea ι θ eſt rationalis, & incommenſurabilis longitudine lineæ ι ζ. Eadem ratione

&

& linea θν eſt etiam rationalis & incommenſurabilis longitudine eidem lineæ ιζ. Et *quoniam compoſitum ex quadratis linearũ αγ,γβ eſt incommenſurabile ei quod fit bis ex αγ,γβ (quia poſitum eſt eſſe incommenſurabile ei quod fit ſemel ex αγ,γβ.)* Ergo *parallelogrammum ικ eſt incommenſurabile parallelogrammo θκ. quare & linea ιθ eſt incommenſurabilis lineæ θν.* Sunt *autem ιθ,θν rationales.* Ergo *ſunt rationales potentia tantum commenſurabiles. ergo linea ιν eſt binomium per* 36, *& diuiſa in puncto θ, in ſua nomina. Similiter demonſtrabimus eandem lineam ιν diuidi in puncto μ in ſua nomina: nec eſt linea ιθ lineæ μν eadem, hoc eſt æqualis, ut probatum eſt in fine demonſtrationis* 44. Ergo *binomium alibi atque alibi diuiditur in ſua nomina, quod eſt impoſsibile per* 42. Non *igitur linea potens duo medialia diuiditur alibi atque alibi in ſua nomina.* Er*go in puncto uno tantum diuiditur.*

Termini ſecundi ſiue definitiones ſecundæ.

P*ropoſita linea rationali, & binomio diuiſo in ſua nomina, cuius binomij maius nomen, id eſt maior portio poſſit pluſquam minus nomen quadrato lineæ ſibi, maiori inquam nomini commenſurabilis longitudine.*

S*iquidem maius nomen fuerit commenſurabile longitudine propoſitæ lineæ rationali, uocetur tota linea* Binomium *primum.*

S*i uerò minus nomen, id eſt minor portio binomij fuerit cõmenſurabile longitudine propoſitæ lineæ rationali, uocetur tota linea* Binomium *ſecundum.*

S*i uerò neutrum nomen fuerit commenſurabile longitu-*

dine propoſitæ lineæ rationali, uocetur binomiū tertiū.

Rurſus ſi maius nomen poßit pluſquā minus nomen quadrato lineæ ſibi incommenſurabilis longitudine, ſiquidem maius nomen eſt cōmenſurabile lōgitudine propoſitæ lineæ rationali uocetur tota linea binomiū quartum.

Si uerò minus nomen fuerit commenſurabile longitudine lineæ rationali, uocetur binomium quintum.

Si uerò neutrum nomen fuerit longitudine commenſurabile lineæ rationali, uocetur illa binomium ſextum.

Hîc nihil dicitur de lineis illis quarū ambæ portiones ſunt longitudine commenſurabiles propoſitæ lineæ rationali, quia lineæ tales non ſunt binomia, cum ſcilicet illa cōponantur ex duabus rationalibus potentia tantum cōmenſurabilibus, ut eſt in 36. Lineæ uerò quarum ambæ portiones ſunt longitudine commenſurabiles propoſitæ lineæ rationali non ſunt binomia, quia portiones taliū linearum eſſent inter ſe quoque longitudine commenſurabiles per 12 huius. Ergo non eſſent quales requirūtur ad compoſitionem binomij. Præterea lineæ tales nō eſſent irrationales ſed rationales, quia ſunt commēſurabiles ſingulis partibus ſe componētibus per 16. Ergo eſſent rationales quia componentes eſſent rationales.

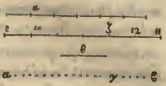
Quadrageſimumoctauum Theorema.

Reperire binomium primum.

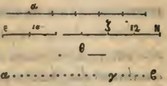
Proponantur numeri duo α γ, γ ϐ *tales ut compoſitus ex ipſis totus* α ϐ *ad alterum ex ijſdē nempe* γ ϐ *habeat proportionem quā numerus quadratus ad numerū quadratum: ad alterum uerò* α γ, *idem* α ϐ *proportionē eam*

ne

ne retineat quam numerus
quadratus ad numerū qua-
dratum, qualis eſt numerus
quadratus diuiſibilis in qua



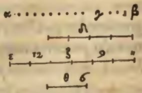
dratum & non quadratū, inquit Campanus theoremate 17. Sit autem linea rationalis δ, eiq́; commēſurabilis longitudine ſit linea ε ζ: rationalis eſt ergo linea ε ζ. Fiat autē ſicut numerus α β ad numerum α γ, ita quadratum lineæ ε ζ ad quadratum alterius lineæ quæ ſit ζ η per lemma repoſitum à nobis poſt 6 theorema. Ergo quadratum lineæ ε ζ ad quadratū lineæ ζ η proportionē habet quam numerus ad numerū. Quare illa quadrata ſunt commenſurabilia per 6. Eſt autem linea ε ζ rationalis, ergo linea ζ η erit etiam rationalis. Et quoniam numerus β α ad numerum α γ non habet proportionem quam numerus quadratus ad numerum quadratum, neque etiam quadratum lineæ ε ζ ad quadratum lineæ ζ η habebit proportionem quā numerus quadratus ad numerum quadratum. incommenſurabilis eſt ergo longitudine linea ε ζ lineæ ζ η. Ergo illæ lineæ ε ζ, ζ η ſunt rationales potentia tantum commenſurabiles. Ergo tota linea ε η eſt binomium per 36. Dico præterea eandem lineam eſſe binomium primum. Nam cum ſit ſicut numerus β α ad numerum α γ, ita quadratū lineæ ε ζ ad quadratum lineæ ζ η. ſitq́; numerus β α maior numero α γ: maius quoq; erit quadratum lineæ ε ζ quadrato lineæ ζ η. Sint igitur quadrato lineæ ε ζ æqualia quadrata linearum ζ η, θ (quæ quomodo reperiantur docet lemma poſitū poſt 14.) Et cum ſit ſicut numerus β α ad numerū



αγ, ita quadratum lineæ εζ ad quadratũ lineæ ζη. Per euerſam ergo proportionem ſicut numerus βα ad numerum βγ, ita quadratum lineæ εζ ad quadratum lineæ θ. Sed numerus αβ ad numerum αγ habet proportionẽ quam numerus quadratus ad numerum quadratum. Ergo quadratum lineæ εζ ad quadratum lineæ θ habet etiam proportionem quam numerus quadratus ad numerum quadratum. Ergo linea εζ erit longitudine commenſurabilis lineæ θ, per 9. ergo linea εζ plus poteſt quã linea ζη quadrato lineæ ſibi commenſurabilis longitudine. Sunt autem lineæ εζ, ζη rationales potentia tantum commenſurabiles. eſtq; linea εζ longitudine cõmenſurabilis lineæ rationali δ. ergo linea εη eſt binomiũ primũ.

Quadrageſimumnonum Theorema.

Reperire binomium ſecundum.



Proponantur numeri duo αγ, γβ tales ut compoſitus ex ipſis totus αβ ad βγ proportionem habeat quam numerus quadratus ad numerum quadratum: ad γα uerò proportionem eam ne habeat quam numerus quadratus ad numerũ quadratum, ut dictum eſt in proximo theoremate. & proponatur linea rationalis δ, & linea δ ſit cõmenſurabilis longitudine lineæ ζη. rationalis eſt ergo linea ζη. Fiat autẽ ſicut numerus γα ad numerum αβ, ita quadratum lineæ ζη ad quadratum

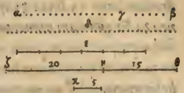
alterius

alterius lineæ quæ ſit ζι.*Ergo commenſurabile eſt quadratum lineæ* ζη *lineæ* ζι.*eſt ergo rationalis etiam linea* ζι.*Et quoniam numerus* γα *ad numerum* αβ *non habet proportionem quam quadratus ad quadratum: neque etiam quadratum lineæ* ζη *ad quadratum* ζι *habebit proportionē quam quadratus numerus ad quadratum.*Ergo *linea* ζη *eſt incommenſurabilis longitudine lineæ* ζι *per 9. ergo lineæ* ζη,ζι *ſunt rationales potētia tantum commēſurabiles. ergo linea* ιη *eſt binomiū.* Dico *præterea eandem eſſe binomium ſecundum.* Cum *enim per contrariam ſiue dicas conuerſam proportiotionem ſit ſicut numerus* αϐ *ad numerum* αγ, *ita quadratum lineæ* ιζ *ad quadratum lineæ* ζη.*maior autem eſt numerus* αϐ,*numero* αγ.*maius etiam erit quadratū lineæ* ιζ *quadrato lineæ* ζη.*Sint quadrato lineæ* ιζ *æqualia quadrata linearum* ζη,θ,*ut dictum eſt in proximo theoremate.*Per *euerſam ergo proportionē ſicut numerus* αβ *ad numerum* βγ,*ita quadratum lineæ* ιζ *ad quadratum lineæ* θ.*Sed numerus* αϐ *ad numerū* βγ *habet proportionem quam numerus quadratus ad numerum quadratum.*Ergo *quadratū lineæ* ιζ *ad quadratū lineæ* θ *proportionem habet quam quadratus numerus ad quadratum. ergo linea* ιζ *erit commenſurabilis longitudine lineæ* θ,*per 9.*Quare *linea* ιζ *plus poteſt quàm linea* ζη *quadrato lineæ ſibi commenſurabilis longitudine.*Sed *linea* ζη *quæ eſt minus nomen,eſt commenſurabilis longitudine propoſitæ lineæ rationali* Α *per hypotheſin.*Ergo *linea* ιη *eſt binomium ſecundum.*

Quinquageſimum Theorema.

Reperire binomium tertium.

Proponãtur numeri duo αβ, γβ; tales ut cõpoſitus ex ipſis, totus αβ ad numerum βγ proportionem habeat quã numerus quadratus ad quadratum, ad numerũ uerò αγ proportionem ne habeat quam numerus quadratus ad quadratum. Proponatur autẽ & alius numerus ſiue quadratus, ſiue non quadratus, qui ſit δ, qui ad ſingulos αβ, αγ proportionem non habeat quam numerus quadratus ad quadratum. Proponaturq; linea rationalis ε & fiat ſicut numerus δ ad numerum αβ, ita quadratum lineæ ε ad quadratum ζη. Commenſurabile eſt ergo quadratum lineæ ε quadrato lineæ ζη. Sed linea ε eſt rationalis: rationalis eſt ergo linea ζη. & quoniam numerus δ ad numerum αβ proportionem non habet quam numerus quadratus ad quadratum, neque etiam quadratum lineæ ε ad quadratum lineæ ζη proportionem eam habet quam quadratus numerus ad quadratum. eſt ergo linea ε incõmenſurabilis longitudine lineæ ζη. Rurſus fiat ſicut numerus αβ ad numerum αγ, ita quadratum lineæ ζη ad quadratum lineæ ηθ. Commenſurabile ergo eſt quadratum lineæ ζη quadrato lineæ ηθ. Sed linea ζη eſt rationalis. ergo linea ηθ erit etiã rationalis. Et quoniam numerus αβ ad numerum αγ proportionem non habet quam quadratus numerus ad quadratum, neq; etiam quadratum lineæ ζη ad quadratũ lineæ ηθ proportionem habet quam quadratus numerus ad quadratum:

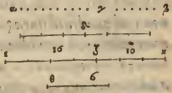


dratum. Eſt ergo linea ζκ longitudine incommenſurabilis lineæ κθ. ergo lineæ ζκ, κθ ſunt rationales potẽtia tantum commẽſurabiles. tota ergo linea ζθ erit binomiũ. Dico *præterea illam eſſe binomium tertium. Cum enim ſit ſicut numerus δ ad numerum αβ, ita quadratum lineæ ε ad quadratũ lineæ ζκ. Sicut uerò numerus αβ ad numerum αγ, ita quadratum lineæ ζκ ad quadratum lineæ κθ.* Per *æquam ergo proportionem ſicut numerus δ ad numerum αγ, ita quadratum lineæ ε ad quadratũ lineæ κθ. Sed numerus δ ad numerũ αγ non habet proportionem quam numerus quadratus ad quadratum.* Ergo *quadratum lineæ ε nõ habet proportionẽ ad quadratũ lineæ κθ quam quadratus numerus ad quadratum. eſt ergo linea ε longitudine incommenſurabilis lineæ κθ per 9.* Et *quoniam eſt ſicut numerus αβ ad numerum αγ, ita quadratum lineæ ζκ ad quadratum lineæ κθ.* Ergo *quadratum lineæ ζκ eſt maius quadrato lineæ κθ. ſint ergo quadrato lineæ ζκ æqualia quadrata linearum κθ, λ.* Per *euerſam ergo proportionẽ ſicut numerus αβ ad numerum βγ, ita quadratum lineæ ζκ ad quadratum lineæ λ. Sed numerus αβ ad numerum βγ habet proportionem quã quadratus numerus ad quadratum. ergo & quadratum lineæ ζκ ad quadratum lineæ λ habebit proportionem quam numerus quadratus ad quadratum. ergo linea ζκ eſt longitudine commenſurabilis lineæ λ. ergo linea ζκ plus poteſt quam linea κθ quadrato lineæ ſibi longitudine commenſurabilis.* Sunt *autem lineæ ζκ, κθ rationales potentia tantum commenſurabiles: & neutra eſt commenſurabilis lon-*

gitudine lineæ ε. Ergo linea ζθ eſt binomium tertium.

Quinquageſimumprimum Theorema.

Reperire binomium quartum.

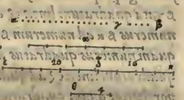


Proponantur numeri duo αγ, γβ tales, ut cõpoſitus ex ipſis nempe αβ ad neutrũ eorum habeat proportionem quam numerus quadratus ad quadratũ (qualis eſt omnis numerus quadratus ad duos numeros non quadratos ſe minores ipſum componentes.) Sit autem linea rationalis δ, & lineæ δ ſit commẽſurabilis longitudine linea εζ. eſt ergo rationalis εζ. Sitq́; ſicut numerus βα ad numerum αγ, ita quadratũ lineæ εζ ad quadratũ lineæ ζη. ergo quadratum lineæ εζ eſt commenſurabile quadrato lineæ ζη. Eſt ergo linea ζη rationalis. Et quoniam numerus βα ad numerũ αγ proportionem nõ habet quam quadratus numerus ad quadratum: neque quadratum lineæ εζ ad quadratum lineæ ζη habebit proportionem quam quadratus numerus ad numerum quadratum. ergo linea εζ eſt longitudine incommenſurabilis lineæ ζη. Ergo lineæ εζ, ζη ſunt rationales potentia tantum commenſurabiles, quare tota linea εη eſt binomium. Dico præterea eam eſſe binomium quartum. Cum enim ſit ſicut numerus βα ad numerum αγ, ita quadratum lineæ εζ ad quadratum lineæ ζη: eſt autem numerus βα maior numero αγ. Ergo quadratum lineæ εζ erit maius quadrato lineæ ζη. Sint ergo quadrato lineæ εζ æqualia quadrata linearũ ζη, θ.

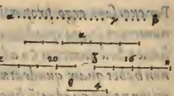
Per euerſam ergo proportionem ſicut numerus β α ad numerum ς γ, ita quadratum lineæ ε ζ ad quadratum lineæ θ. Sed numerus ς α ad numerum ς γ proportionem non habet quam quadratus numerus ad quadratum, igitur neque quadratũ lineæ ε ζ ad quadratum lineæ θ habebit proportionem quam quadratus numerus ad quadratum numerum. Eſt ergo linea ε ζ incommenſurabilis longitudine lineæ θ: ergo linea ε ζ plus poteſt quã linea ζ κ quadrato lineæ ſibi incommenſurabilis longitudine, Sunt autem lineæ ε ζ & ζ κ rationales potentia tantũ commenſurabiles, eſtq; linea ε ζ lineæ rationali α cõmẽſurabilis lõgitudine, Ergo linea ε κ eſt binomiũ quartũ.

Quinquageſimumſecundum Theorema.

Reperire binomium quintum.



Proponãtur numeri duo α γ, γ β tales, ut totus α β ad ſingulos α γ, γ β proportionẽ eam nẽ habeat quã quadratus numerus ad quadratum; ſicut in proximo theoremate. Et ſit linea rationalis α: lineæ autem α ſit commenſurabilis longitudine linea ζ κ. Eſt ergo linea ζ κ rationalis: ſitq; ſicut numerus γ α ad numerum α β, ita quadratũ lineæ ζ κ ad quadratum lineæ ζ ε: ergo quadratum lineæ ζ κ eſt commenſurabile quadrato lineæ ζ ε. Eſt ergo etiam linea ζ ε rationalis. Et quoniam numerus α γ ad numerum α β nõ habet proportionem quam numerus quadratus ad quadratum, neque etiam quadratum lineæ ζ κ ad quadra-

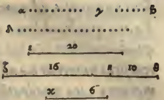


tum lineæ ζε habebit proportionem quã numerus quadratus ad quadratũ, Ergo lineæ ζη, ζε ſunt longitudine incommenſurabiles. ergo lineæ ζη, ζε ſunt rationales potentia tantum cõmenſurabiles: ergo tota linea εη eſt binomiũ. Dico præterea eam eſſe binomium quintum. Cum enim ſit ſicut numerus αγ ad numerum αβ, ita quadratum lineæ ζη ad quadratum lineæ εζ. Per conuerſam ergo proportionem ſicut numerus βα ad numerum αγ, ita quadratum lineæ εζ ad quadratum lineæ ζη. Eſt ergo quadratum lineæ εζ maius quadrato lineæ ζη. Sint ergo quadrato lineæ εζ æqualia quadrata linearũ ζη, θ. Per euerſam ergo proportionem ſicut numerus βα ad numerum βγ, ita quadratum lineæ εζ ad quadratum lineæ θ. Sed numerus βα ad numerum βγ non habet proportionem quam numerus quadratus ad quadratum. Ergo neque quadratum lineæ εζ ad quadratũ lineæ θ, habebit proportionem quam quadratus numerus ad quadratum. Eſt ergo linea ζε longitudine incommẽſurabilis lineæ θ: ergo linea ζε plus poteſt quàm linea ζη quadrato lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis. Sunt autem lineæ ζε, ζη rationales potentia tantum commenſurabiles, & linea ζη minus nomen eſt, commenſurabile longitudine lineæ rationali δ. Ergo linea εη eſt binomium quintum.

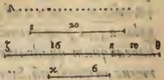
Quinquageſimumtertium Theorema.

Reperire binomium ſextum.

Proponantur



Proponantur numeri duo αγ, γβ tales, ut totus αβ ad ſingulos αγ, γϛ proportionẽ ne habeat quam quadratus numerus ad quadratũ. Sit etiã & alius numerus δ, quiq́ue ad ſingulos αϛ, αγ non habeat proportionem quam quadratus numerus ad quadratum. Sitq́; linea rationalis ε: ſit etiam ſicut numerus δ ad numerum ϛα, ita quadratum lineæ ε ad quadratũ lineæ ζη. Ergo linea ε erit potentia commenſurabilis lineæ ζη. eſt autem rationalis linea ε. ergo & lineæ ζη erit rationalis. Et quoniam numerus δ ad numerũ αβ non habet proportionẽ quam numerus quadratus ad quadratum: neque etiam quadratum lineæ ε ad quadratũ lineæ ζη habebit proportionem quã numerus quadratus ad quadratum. Eſt ergo linea ε longitudine incommenſurabilis lineæ ζη. Rurſus fiat ſicut numerus βα ad numerum αγ, ita quadratum lineæ ζη ad quadratum lineæ ηθ. Ergo quadrata illa ſunt commenſurabilia. Sed quadratum lineæ ζη eſt rationale: eſt ergo etiã quadratum lineæ ηθ rationale. Ergo & linea ηθ rationalis. Et quoniam numerus βα ad numerum αγ proportionẽ nõ habet quam numerus quadratus ad quadratum: neq; quadratum lineæ ζη ad quadratum lineæ ηθ proportionem habebit quam quadratus numerus ad quadratum. Eſt ergo linea ζη longitudine incommenſurabilis lineæ ηζ. ergo lineæ ζη, ηθ ſunt rationales potentia tantũ commenſurabiles. ergo tota linea ζθ erit binomium. Dico præterea eam eſſe binomium ſextum. Cum enim ſit

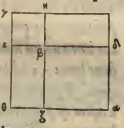


ſicut numerus δ ad numerũ βα, ita quadratũ lineæ ε ad quadratum lineæ ζη. Eſt autem ſicut numerus βα ad numerum αγ, ita quadratũ lineæ ζη ad quadratum lineæ ηθ. Per æquam ergo proportionem ſicut numerus δ ad numerum αγ, ita quadratũ lineæ ε ad quadratum lineæ ηθ. Sed numerus δ ad numerum αγ non habet proportionem quam quadratus numerus ad quadratum: neq; etiam quadratũ lineæ ε ad quadratum lineæ ηθ habebit proportionem quã numerus quadratus ad quadratũ. Ergo linea ε eſt longitudine incommenſurabiles lineæ ηθ. Sed modo probatũ eſt lineam ζη eſſe etiam longitudine incommẽſurabilem lineæ ε. Ergo ambæ lineæ ζη, ηθ ſunt incommenſurabiles longitudine lineæ ε. Et quoniam eſt ſicut numerus βα ad numerum αγ, ita quadratum lineæ ζη ad quadratũ lineæ ηθ. maius eſt ergo quadratũ lineæ ζη quadrato lineæ ηθ. Sint ergo quadrato lineæ ζη æqualia quadrata linearum ηθ, κ. Ergo per euerſam proportionem ſicut numerus βα ad numerum βγ, ita quadratum lineæ ζη ad quadratum lineæ κ. Sed numerus βα ad numerum βγ non habet proportionem quam numerus quadratus ad quadratum. ergo neq; quadratũ lineæ ζη ad quadratum lineæ κ habebit proportionẽ quam numerus quadratus ad quadratũ. Ergo linea ζη, eſt longitudine incommenſurabilis lineæ κ. ergo linea ζη poteſt pluſquam linea ηθ quadrato lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis. Sunt autem lineæ ζη, ηθ rationales potẽtia tan-

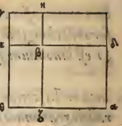
tum commenſurabiles, & ambæ lineæ ζκ, κθ incommēſurabiles longitudine lineæ rationali δ. Ergo tota linea ζθ eſt binomium ſextum.

Lemma.

Si linea recta ſecetur in partes duas quocunque modo parallelogrammum rectangulum contentum ex ſectionibus ambabus eſt medium proportionaliter inter quadrata ſectionum. Et *parallelogrammum rectangulum contentum ex tota linea & altera ſectione eſt medium proportionaliter inter quadratū totius lineæ & quadratum dictæ ſectionis.* Sint *duo quadrata αβ, βγ, ita collocata ut lineæ δε, ει ſint in eadem recta linea.* Erunt *ergo & lineæ ζβ, βκ in eadem recta linea per* 14.1. Com*pleatur ergo parallelogrāmū αγ.*



Di*co parallelogrammum rectangulum &c. ut in lemmate.* Imprimis *parallelogrammum αγ eſt quadratum, quia linea αβ eſt æqualis lineæ ζβ: linea uerò βι lineæ βκ. tota ergo linea δι eſt æqualis toti lineæ ζκ.* Sed *linea δι eſt æqualis utrique γκ, θα. linea item ζκ eſt æqualis utrique ακ, θγ per* 34.1. *ergo utraque linearum αθ, κγ eſt æqualis utrique ακ, θγ.* Ergo *parallelogrammum αγ eſt æquilaterum.* Eſt *etiam rectangulum per* 29.1. *ergo parallelogrammum αγ eſt quadratum.* Et *quoniam eſt ſicut linea ζβ ad lineam βκ, ita linea δε ad lineam ει.* Sed *ſicut linea ζβ ad lineam εκ, ita parallelogrammum αβ, quod eſt quadratū lineæ δε, ad parallelogrammū δκ per* 1.6. Sicut *autem linea δβ ad lineam ει, ita pa-*

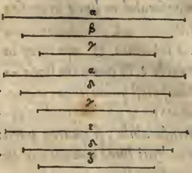


rallelogrammum δη ad parallelogrammũ βγ, quod eſt quadratũ lineæ ζι per 1.6. Ergo ſicut quadratum αζ ad parallelogrammũ δη, ita parallelogrammum δη ad quadratũ βγ. Ergo parallelogrammum δη eſt medium proportionaliter inter quadrata αζ, βγ. Dico prætereà parallelogrammum δγ eſſe medium proportionaliter inter quadrata αγ, βγ. Cum enim ſit ſicut linea αδ ad lineam δη, ita linea ηη ad lineam ηγ. ſingulæ enim ſunt ſingulis æquales. Per compoſitam ergo proportionem quæ probatur per 18.5, ſicut linea αη ad lineam ηδ, ita linea ηγ ad lineã ηγ. Sed ſicut linea αη ad lineam ηδ, ita quadratum lineæ αη, quod eſt quadratum αγ, ad parallelogrammum ex αη, ηδ, hoc eſt parallelogrammum δγ per 1.6. Sicut autem linea ηγ ad lineam ηγ, ita parallelogrammum δγ ad quadratum lineæ ηγ, quod eſt quadratum βγ. Sicut ergo quadratum αγ ad parallelogrammum δγ, ita parallelogrammum δγ ad quadratum βγ. Ergo parallelogrammum δγ eſt medium proportionaliter inter quadrata αγ, βγ. quod demonſtrandum erat.

Lemma.

Quæ ſunt media proportionaliter inter eadẽ aut æqualia ſunt, ipſa quoque inter ſe æqualia. Sint tres magnitudines α, ζ, γ. Sitque ſicut α ad ζ, ita β ad γ. ſit ſimiliter ſicut eadẽ magnitudo α ad δ, ita δ ad eandẽ magnitudinẽ γ. Dico β, δ eſſe inter ſe æqualia. Nam proportio α ad γ eſt proportio duplicata ipſius α ad ζ per diffinitionẽ, ſimiliter

liter proportio eadẽ ipſius α ad γ, eſt proportio duplicata ipſius α ad δ, per eandẽ diffinitionẽ. ſed quorum æqualiter multiplicia ſunt æqualia, aut eadẽ ipſa quoq; ſunt æqualia. Ergo ſicut α ad β, ita α ad δ:

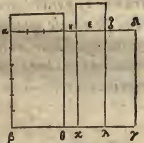


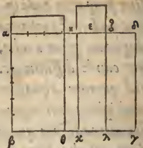
ergo per 9.5. β, δ, ſunt inter ſe æqualia. Idẽ, ſi fuerint aliæ magnitudines æquales ipſis α, γ puta ε, ζ inter quas ſit media proportionalis magnitudo δ.

Quinquageſimumquartum Theorema.

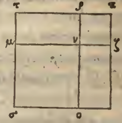
Si ſuperficies contenta fuerit ex rationali & binomio primo, linea quæ illam ſuperficiẽ poteſt, eſt irrationalis quæ binomium uocatur.

Superficies enim, αβγδ, cõtineatur ex linea rationali αβ & binomio primo linea αδ. Dico *lineam quæ ſuperficiem αγ poteſt eſſe irrationalẽ illam quæ uocatur binomium. Cum enim linea αδ ſit binomium primũ, diuidatur in ſua nomina in pũcto ε, ſitq; maius nomen αε, conſtat lineas αε, εδ eſſe rationales potentia tantum commenſurabiles, & lineam αε plus poſſe, quàm linea εδ quadrato lineæ ſibi cõmenſurabilis longitudine, & lineam αε eſſe longitudine cõ-*

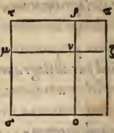




menſurabilem lineæ propoſitæ rationali α ϲ. *Diuidatur linea* ι δ *bifariam, & æqualiter in puncto* ζ. *Et quoniam linea* α ι *plus poteſt quàm linea* ι δ *quadrato lineæ ſibi longitudine cõmenſurabilis, ſi quartæ parti quadrati lineæ minoris, hoc eſt quadrato lineæ* ι ζ *æquale ſecundum maiorẽ lineã, nempe* α ι *applicetur, deficiẽs figura quadrata diuidet lineã maiorem, nempe* α ι *in partes inter ſe longitudine commenſurabiles, per ſecundam partem 18 huius. applicetur ergo ſecũdum lineam* α ι *æquale quadrato lineæ* ι ζ *parallelogrammum ex* α κ, κ ι. *Ergo linea* α κ *eſt longitudine commenſurabilis lineæ* ι κ. *Ducantur per puncta* κ, ι, ζ *alterutri linearum* α β, δ γ *parallelæ* κ θ, ι χ, λ ζ *per 31.1. & parallelogrammo* α θ *æquale quadratum conſtruatur* σ ν: *parallelogrammo uerò* κ χ, *ſit æquale quadratum* ν π, *& ita deſcribãtur, ut linea* μ ν *ſit in eadem recta linea cum* ν ξ. *ſunt ergo in eadẽ recta linea lineæ* ρ ν, ν ο, *& compleatur parallelogrammum* σ π. *Ergo parallelogrammũ* σ π *eſt quadratum per ea quæ dicta ſunt in demonſtratione lemmatis penultimi. Et quoniam parallelogrammum ex* α κ, κ ι *eſt æquale quadrato lineæ* ι ζ: *Eſt igitur ſicut linea* α κ *ad lineam* ι ζ, *ita linea* ι ζ *ad lineã* κ ι *per 17.6. Ergo per 1.6. ſicut parallelogrammum* α θ *ad parallelo-*



rallelogrammum ι λ, ita parallelogrammum ι λ ad parallelogrammum κ ν. Ergo parallelogrammũ ι λ eſt medium proportionaliter inter parallelogramma α θ, κ ν. Sed parallelogrammum α θ eſt æquale quadrato σ υ. parallelogrammum uerò ν κ eſt æquale quadrato υ ϖ. Ergo quadratorum σ υ, υ ϖ mediũ proportionale eſt ι λ, quorũ quadratorum σ υ, υ ϖ medium quoque proportionaliter eſt parallelogrammum μ ρ per lemma penultimũ. ergo μ ρ eſt æquale parallelogrammo ι λ per lemma proximum ante hoc theorema. Sed parallelogrammũ μ ρ eſt æquale parallelogrammo ο ξ per 43.1. parallelogrammum uerò ι λ eſt æquale parallelogrammo ζ γ. Totũ ergo parallelogrammum ι γ eſt æquale duobus parallelogrammis μ ρ, ο ξ inter ſe æqualibus. Sed parallelogramma α θ, ν κ ſunt æqualia quadratis σ υ, υ ϖ, totum ergo parallelogrammum α γ eſt æquale toti quadrato σ ϖ, hoc eſt quadrato lineæ μ ξ. Ergo linea μ ξ poteſt parallelogrammum α γ. dico lineam μ ξ eſſe binomiũ. Cum enim linea α ν ſit longitudine commenſurabilis lineæ ν ι, ergo linea tota α ι eſt commenſurabilis longitudine utrique α ν, ν ι per 16. Sed per ſuppoſitionem linea α ι eſt longitudine commenſurabilis lineæ α β, ergo & utraque α ν, ν ι eſt commenſurabilis longitudine lineæ α β per 12. eſt autem linea α β rationalis: rationalis eſt ergo utraque α ν, ν ι. Eſt ergo utrũq; parallelogrammum α θ, ν κ rationale per 20. Ergo & parallelogrammum α θ erit commenſurabile parallelogrãmo ν κ. ergo & quæ ſunt illis æqualia, nempe quadrata σ υ, υ π quæ ſunt quadrata linearũ μ υ, υ ξ ſunt rationalia & commenſurabilia. Et quoniã

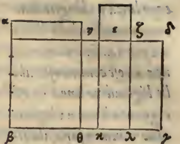


linea αι eſt per poſitionem longitudine incōmenſurabilis lineæ ιδ, ſed linea αι lineæ ακ eſt commenſurabilis, ut modo probatum eſt: linea autem ιδ eſt commenſurabilis lineæ ιξ. Ergo per corollariū à nobis poſitum poſt 14. linea ακ, eſt incommenſurabilis longitudine lineæ ιζ. Quare & parallelogrammum αθ parallelogrammo ιλ eſt incōmenſurabile. Ergo & quadratū σν eſt incommenſurabile parallelogrāmo μρ, quia per poſitionem parallelogrāmum αθ eſt æquale quadrato σν: & parallelogrāmum ιλ probatum eſt æquale parallelogrammo μρ. Sed ſicut quadratum σν, ad parallelogrammum μρ, ita linea ον ad lineam νρ per 1.6. ergo per 10 linea ον eſt incommēſurabilis lineæ νρ. eſt autem linea ον æqualis lineæ μν: linea autem νρ lineæ νξ. eſt ergo incommenſurabilis linea μν lineæ νξ. Modo autem probatum eſt quadrata ambarum linearum μν, νξ eſſe rationalia & commenſurabilia. Ergo lineæ μν, νξ ſunt rationales potētia tantū commenſurabiles. ergo linea μξ eſt binomium, & poteſt parallelogrammum αγ. quod demonſtrandum erat.

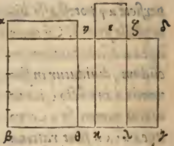
Quinquageſimumquintum Theorema.

Si ſuperficies contenta fuerit ex linea rationali & binomio ſecundo, linea potens illam ſuperficiem eſt irrationalis quæ bimediale primum uocatur.

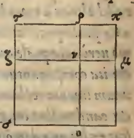
Superficies enim, αϛγδ, contineatur ex rationali αβ & binomio ſecundo, quæ ſit linea αδ. Dico lineam quæ ſu-



perficiẽ α γ poteſt, eſſe bimediale primũ. Cũ enim linea α δ ſit binomium ſecũdum, diuidatur in ſua nomina in pũcto ε, ita ut maius nomen ſit α ε. ergo lineæ α ε, ε δ ſunt rationales tantum potentia commenſurabiles, & linea α ε poteſt plus quàm linea ε δ quadrato lineæ ſibi longitudine commenſurabilis, & minus nomen nempe ε δ eſt commenſurabile longitudine lineæ α ϐ. Secetur linea ε δ bifariam & æqualiter in puncto ζ, & quadrato lineæ ε ζ æquale ſecundum lineam α ε applicetur parallelogrammum deficiens figura quadrata, quod parallelogrammum ſit ex lineis α κ, κ ε. Ergo linea α κ, eſt longitudine cõmenſurabilis lineæ κ ε: & per puncta κ, ε, ζ ducantur parallelæ lineis α ϐ, δ γ, lineæ κ θ, ε κ, ζ λ. Et parallelogrãmo α θ æquale quadratum conſtruatur σ ν. parallelogrammo uerò κ λ, æquale quadratum ſimiliter cõſtruatur ν ϖ, & ita componantur ut linea μ ν, & linea ν ξ conficiant unam lineam rectam. ergo & lineæ ο ν, ν ρ cõficiunt unã & eandem lineam, & compleatur quadratũ σ ϖ. Conſtat ex his quæ demõſtrata ſunt in proximo theoremate parallelogrammum μ ρ eſſe proportionaliter mediũ inter quadrata σ ν, ν ϖ, & æquale parallelogrãmo ε λ & lineam μ ξ poſſe ſuperficiẽ α γ. Modo ſupereſt ut demonſtremus lineam μ ξ eſſe bimediale primum: quoniã linea α ε eſt longitudine incommenſurabilis lineæ ε δ, & linea ε δ eſt commenſurabilis longitudine lineæ α ϐ. eſt



ergo linea ακ longitudine incommenſurabilis lineæ αβ per 14. Et quoniam linea αι eſt commenſurabilis lõgitudine lineæ ικ, eſt ergo tota linea ακ lõgitudine commenſurabilis lineæ utrique αι, ικ per 16. eſt autẽ linea ακ rationalis, ergo utraque αι, ικ rationalis. Et quoniam linea ακ eſt longitudine incommẽſurabilis lineæ αβ. eſt autem linea ακ commenſurabilis longitudine utrique αι, ικ, ergo lineæ αι, ικ ſunt longitudine incõmenſurabiles lineæ αβ. ergo lineæ αβ, αι, ικ ſunt rationales potentia tantum cõmenſurabiles. Quare utrunque parallelogrammũ αθ, ιλ eſt mediale per 22. quare utrũque quadratum σν, νπ, eſt etiã mediale, ergo lineæ μν, νξ, ſunt mediales. Et quoniã linea αι eſt longitudine cõmẽſurabilis lineæ ικ, cõmmẽſurabile eſt parallelogrãmũ αθ parallelogrammo ιλ per 1.6. & 10 huius, hoc eſt quadratum σν quadrato νπ, hoc eſt quadratum lineæ μν, quadrato lineæ νξ, quare lineæ μν, νξ ſunt potentia cõmenſurabiles. Et quoniã linea αι eſt longitudine incõmẽſurabilis lineæ ιλ. ſed linea αι eſt longitudine cõmẽſurabilis lineæ ακ, linea uerò ιλ eſt lõgitudine commenſurabilis lineæ ιζ. eſt ergo linea αι incommenſurabilis longitudine lineæ ιζ per corollarium 14 theorematis. Quare & parallelogrammũ αθ eſt incommen-

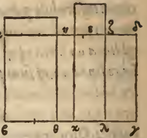
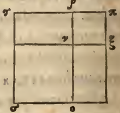


commenſurabile parallelogrammo ι λ, hoc eſt quadratum σ ν parallelogrãmo μ ρ, hoc eſt linea ο ν lineæ ν ρ, hoc eſt linea μ ν lineæ ν ξ eſt longitudine incommenſurabilis. Ergo lineæ μ ν, ν ξ ſunt potentia tantum commenſurabiles. Sed modo probatũ eſt eaſdem eſſe mediales, ergo lineæ μ ν, ν ξ ſunt mediales potentia tantum commenſurabiles. Dico præterea eas continere ſuperficiem rationalem. Cum enim linea ι δ ſit longitudine cõmenſurabilis utrique α β, ι ζ. Eſt ergo linea ι ζ longitudine commenſurabilis lineæ ι κ quæ eſt æqualis lineæ α ς. Eſt autẽ utraque linea ι ζ, ι κ rationalis. ergo parallelogrammũ ι λ eſt rationale per 20 huius, hoc eſt ei æquale parallelogrammum μ ρ. Sed parallelogrammum μ ρ eſt contentum ex lineis μ ν, ν ξ. Ergo per 37 linea μ ξ eſt bimediale primum quod demonſtrandum erat.

Quinquageſimumſextum Theorema.

Si ſuperficies contineatur ex rationali & binomio tertio, linea quæ illam ſuperficiem poteſt, eſt irrationalis quæ dicitur bimediale ſecundum.

Superficies enim α β γ δ contineatur ex rationali α β & binomio tertio linea α δ, quæ ſit diuiſa in ſua nomina in puncto ι, quorum maius nomen ſit linea α ι. Dico lineã quæ poteſt ſuperficiem α γ eſſe irrationalem uocatã bimediale ſecundum. Sit enim eadem conſtructio figurarum quæ in proximis theorematibus. Quoniam linea α δ eſt binomium tertiũ lineæ α ι, ι δ ſunt rationales potentia tantum commẽſurabiles, & linea α ι plus poteſt quàm linea ι δ quadrato lineæ ſibi longitudine com-

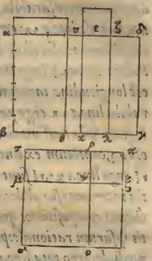
mẽſurabilis, & neutra linearũ ι, ι δ eſt longitudine commẽſurabilis lineæ α β. Sicut in ſuperioribus eſt demonſtratũ, ita hic demonſtrari poteſt lineã μ ξ poſſe ſuperficiẽ α γ, & lineas μ ν, ν ξ eſſe mediales potentia tantũ cõmenſurabiles, itaque lineam μ ξ eſſe compoſitã ex lineis medialibus potentia tantum commenſuralibus. Reſtat demonſtrandum eandem lineam μ ξ eſſe bimediale ſecundum, quoniam linea ι δ eſt longitudine incommẽſurabilis lineæ α β, hoc eſt lineæ ι κ. ſed linea ι δ eſt commẽſurabilis lõgitudine lineæ ι ζ. Eſt ergo linea ι ζ lõgitudine incommẽſurabilis lineæ ι κ. ergo lineæ ζ ι, ι κ ſunt rationales, quia ex hypotheſi linea ι δ eſt rationalis, cui linea ζ ι eſt commenſurabilis. Ergo lineæ ζ ι, ι κ ſunt rationales potẽtia tantum commenſurabiles. ergo parallelogrammum ι λ eſt mediale per 22. hoc eſt parallelogrammum μ ρ, quod continetur ex lineis μ ν, ν ξ. Ergo linea μ ξ eſt bimediale ſecundum.

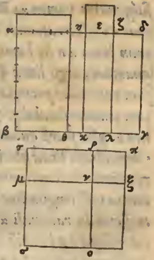
Quinquageſimumſeptimum Theorema.

Si ſuperficies contineatur ex rationali & binomio quarto, linea potens ſuperficiem illam eſt irrationalis, quæ dicitur maior.

Superficies α γ contineatur ex linea rationali α β, & binomio quarto, linea α δ diuiſa in ſua nomina in puncto ι, ſitq́;

ſitq; maius nomen α ι. Dico lineam quæ poteſt ſuperficiem α γ eſſe irrationalē eam, quæ dicitur maior. Cum enim linea α δ ſit binomium quartum, ergo lineæ α ι, ι δ ſunt rationales potentia tantum commenſurabiles: & linea α ι plus poteſt quàm linea ι δ quadrato lineæ ſibi incommenſurabilis longitudine: & linea α ι eſt longitudine commēſurabilis rationali α ϐ. Secetur linea ι δ bifariā & æqualiter in puncto ζ, & ſecūdum lineam α ι quadrato lineæ ι ζ æquale applicetur parallelogrammum ex α κ, κ ι. Ergo linea α κ eſt incommēſurabilis longitudine lineæ κ ι per ſecundam partem 19 theorematis. Ducantur ad lineam α ϐ parallelæ κ θ, ι κ, ζ λ, & fiant cætera ut in ſuperioribus. conſtat lineam μ ξ poſſe ſuperficiem α γ. Nunc demōſtremus illam lineā μ ξ eſſe irrationalem, quæ maior dicitur. Cum enim linea α κ ſit incommenſurabilis longitudine lineæ κ ι. ergo etiam erit parallelogrammū α θ incommenſurabile parallelogrammo κ κ, hoc eſt quadratum σ ν quadrato ν ϖ. ergo lineæ μ ν, ν ξ ſunt potentia incommenſurabiles. Et quoniā linea α ι eſt longitudine cōmenſurabilis rationali α ϐ, id eſt per poſitionē, parallelogrammū α κ eſt rationale per 20. ergo & compoſitū ex quadratis illi æqualibus, nempe σ ν, ν ϖ, quæ ſunt quadrata linearū μ ν,

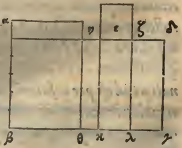




ν ξ, erit ſimiliter rationale. & quoniam linea ι δ eſt longitudine incommenſurabilis lineæ α β, hoc eſt lineæ ι κ: & linea ι δ eſt commenſurabilis longitudine lineæ ι ζ: Ergo linea ι ζ eſt longitudine incommenſurabilis lineæ ι κ. ergo parallelogrammũ ι λ eſt mediale, hoc eſt μ ϱ, contẽtum ex lineis μ ν, ν ξ. ergo lineæ μ ν, ν ξ ſunt potentia incommenſurabiles conficientes compoſitũ ex quadratis ipſarum rationale: parallelogrammum uero ex ipſis mediale. ergo tota linea μ ξ eſt irrationalis quæ dicitur linea maior, & poteſt ſuperficiem α γ quod demonſtrandum erat.

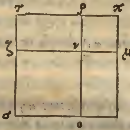
Quinquageſimumoctauum Theorema.

Si ſuperficies contineatur ex rationali & binomio quinto, linea quæ illam ſuperficiem poteſt, eſt irrationalis, quę dicitur potẽs rationale & mediale.



Superficies α γ contineatur ex rationali α β & binomio quinto, linea α δ diuiſa in ſua nomina in puncto ι, ita ut maius nomen ſit α ι. Dico lineã quæ poteſt ſuperficiem illam α γ, eſſe

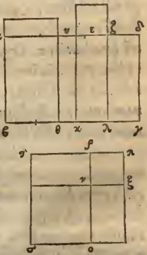
eſſe irrationalem, quæ dicitur potens rationale & mediale. Sint enim eædem conſtructiones quæ in præcedēti. Conſtat lineam quæ poteſt ſuperficiem α γ eſſe μ ξ. Demonſtremus illam lineam μ ξ, eſſe lineam potentem rationale & mediale. Cum enim linea α κ ſit incommenſurabilis longitudine lineæ κ ι, eſt etiam incommenſurabile parallelogrammum α θ parallelogrammo θ ι, hoc eſt quadratũ lineæ μ ν, quod eſt quadratũ σ ν quadrato lineæ ν ξ, quod eſt quadratũ ν ϖ. Ergo lineæ μ ν ν ξ ſunt potentia incommenſurabiles. Et quoniã linea α λ eſt binomium quintũ, eſtq; minus eius nomẽ linea ι λ illa linea ι λ, eſt lõgitudine cõmenſurabilis rationali α β. Sed linea α ι eſt longitudinẽ incommenſurabilis lineæ ι λ. Ergo linea α ι eſt longitudine incommẽſurabilis rationali α β. ergo lineæ α β, α ι ſunt rationales potentia tantum commenſurabiles. ergo parallelogrammum α κ, eſt mediale hoc eſt compoſitum ex quadratis linearum μ ν, ν ξ. Et quoniam eſt commenſurabilis longitudine linea ι λ lineæ α β, hoc eſt lineæ ι κ. ſed linea ι λ eſt commenſurabilis longitudine lineæ ι ζ. Ergo & linea ι ζ eſt longitudine commẽſurabilis lineæ ι κ, & linea ι κ eſt rationalis. ergo & parallelogrammũ ι λ erit rationale per 20. hoc eſt parallelogrammum μ ρ quod continetur ex lineis μ ν, ν ξ. Ergo illæ lineæ μ ν, ν ξ ſunt põtẽtia incõmenſurabiles cõficientes compoſitum ex quadratis ipſarum mediale: parallelegrammum uerò ex ipſis rationale. Ergo tota linea μ ξ



eſt irrationalis, quæ dicitur potẽs rationale & mediale: & poteſt ſuperficiem α γ. quod demonſtrandum erat.

Quinquageſimumnonum Theorema.

Si ſuperficies contineatur ex rationali & binomio ſexto, linea quæ illam ſuperficiem poteſt eſt irrationalis, quæ dicitur potens duo medialia.



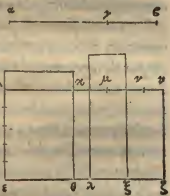
Superficies α β γ δ, contineatur ex rationali α ϐ, & binomio ſexto linea α δ diuiſa in ſua nomina in puncto ι, ita ut maius illius nomẽ ſit α ι: dico lineã quæ poteſt ſuperficiem α γ eſſe irrationalem eam, quæ dicitur potens duo medialia. Sint enim eædem conſtructiones quæ in præcedentibus. Manifeſtum eſt lineã quæ poteſt ſuperficiem α γ eſſe lineã μ ξ, & lineam μ ν eſſe incommenſurabilem potentia lineæ ν ξ: & quoniam eſt incommẽſurabilis longitudine linea α ι lineæ α ϐ. ergo lineæ illæ α ι, α ϐ ſunt rationales potentia tantum commẽſurabiles. Ergo parallelogrammum α κ, hoc eſt compoſitum ex quadratis linearum μ ν, ν ξ eſt mediale. Rurſus cum linea ι δ ſit incommẽſurabilis longitudine lineæ α ϐ, ergo etiam incommenſurabilis longitudine erit linea ι ζ lineæ ι κ. Ergo mediale erit parallelogrammum ι λ, hoc eſt μ ρ, quod cõtinetur ex μ ν, ν ξ. Et quoniam eſt longitudine incommẽſurabilis linea α ι lineæ

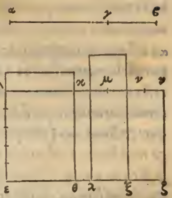
neæ ι ζ. ergo etiam parallelogrammum α κ erit incommenſurabile parallelogrãmo ι λ. Sed parallelogrammũ α κ eſt æquale compoſito ex quadratis linearum μ ν, ν ξ: parallelogrammũ uerò ι λ eſt æquale ei quod fit ex μ ν, ν ξ. Ergo compoſitum ex quadratis linearũ μ ν, ν ξ eſt incommẽſurabile ei quod fit ex μ ν, ν ξ, eſtq́; mediale utrũque: & lineæ μ ν, ν ξ ſunt potentia incõmenſurabiles. Ergo *tota linea μ ξ eſt potens duo medialia, & poteſt ſuperficiem α γ. quod demonſtrandum fuit. Hîc legitur quoddam lemma, quod quia uiſum eſt idem cũ eo quod poſtponitur 39 theoremati, ideo prætermiſimus. præterea quæ hîc affertur illius demonſtratio, cum non ſatisfaciat, ſuperiore illa, quæ & certiſſima & facillima eſt, contenti ſimus: hoc ipſum lemma perſecutus eſt* Campanus *poſt 35.*

Sexageſimum Theorema.

Quadratum binomij ſecundum lineam rationalem applicatũ facit alterũ latus binomiũ primũ.

Sit binomium linea α β diuiſa in ſua nomina in pũcto γ, ita ut maius nomẽ ſit α γ: & proponatur linea rationalis lineæ δ ε: & quadrato lineæ α β æquale ſecundum lineam δ ε applicetur parallelogrammum δ ε, ζ η latus alterum faciẽs lineam δ η. Dico *lineam δ η*





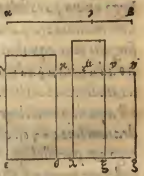
eſſe binomiũ primum. Nã ſecundum lineam δ ι *quadrato lineæ* α γ *æquale applicetur parallelogrammũ* δ θ. *quadrato autem lineæ* β γ *æquale applicetur parallelogrammum* κ λ. *Reſiduum ergo, nempe id quod fit bis ex lineis* α γ, γ β *eſt æquale reſiduo uidelicet parallelogrammo* μ ζ. *Secetur linea* μ κ *bifariã & æqualiter in puncto* ν. *& ducatur linea* ν ξ *parallela utriq; linearum* μ λ, κ ζ. *Vtrumuis ergo parallelogrammorũ* μ ξ, ν ζ *eſt æquale ei quod fit ſemel ex lineis* α γ, γ β. *Et quoniam linea* α β *eſt binomium diuiſa in ſua nomina in puncto* γ. *ergo lineæ* α γ, γ β *ſunt rationales potẽtia tantum commenſurabiles. Ergo quadrata linearum* α γ, γ β *ſunt rationalia, ideóque cõmenſurabilia inter ſe. quare & compoſitum ex illis quadratis linearum* α γ, γ β *eſt commenſurabile ſingulis quadratis linearũ* α γ, γ β *per* 16. *Ergo compoſitum ex quadratis linearum* α γ, γ β *eſt rationale. eſt autem æquale parallelogrammo* δ λ. *ergo & parallelogrammum* δ λ *eſt rationale, & ſecundum lineam rationalem applicatur* δ ι. *Ergo linea* δ μ *eſt rationalis & longitudine cõmenſurabilis lineæ* δ ι *per* 21. *Rurſus quoniam lineæ* α γ, γ β *ſunt rationales potentia tantum commẽſurabiles: ergo id quod fit bis ex* α γ, γ β, *nempe parallelogrammum* μ ζ *eſt mediale per* 22. *& illud parallelogrammum* μ ζ *applicatur ſecũdum rationalem*

nalem μ λ. eſt ergo linea μ ν rationalis & incommenſurabilis longitudine lineæ μ λ, hoc eſt lineæ δ ι. Eſt autem & linea δ μ rationalis & longitudine commenſurabilis lineæ δ ι. Eſt ergo linea δ μ, lineæ μ ν longitudine incō menſurabilis. Sunt autem ambæ rationales. ſunt ergo lineæ δ μ, μ ν rationales potentia tantum commenſurabiles. Ergo linea δ ν eſt binomium. Demonſtremus præterea illam eſſe binomium primum. Nam cum quadratorum linearum α γ, γ ϐ ſit proportionaliter medium parallelogrammum ex α γ γ β per lemma poſitum poſt 53. Ergo etiam parallelogrammorum δ θ, κ λ, proportionaliter medium erit parallelogrammum μ ξ, quia ſingula ſingulis ſunt æqualia. Eſt ergo ſicut parallelogrammum δ θ ad μ ξ, ita μ ξ ad κ λ, hoc eſt ſicut linea δ κ ad lineam μ ν, ita linea μ ν ad lineam μ κ. Ergo quadratum lineæ μ ν eſt æquale parallelogrammo ex δ κ, μ κ. Et quoniā quadratum lineæ α γ eſt cōmenſurabile quadrato lineæ γ ϐ: ergo & parallelogrammum δ θ eſt cōmenſurabile parallelogrammo κ λ. Quare & linea δ κ eſt longitudine commenſurabilis lineæ κ μ per 1.6. & 10 huius. Et quoniam quadrata linearū α γ, γ β ſunt maiora eo quòd fit bis ex α γ, γ β per lemma poſitū poſt 39. ergo & parallelogrammū δ λ eſt maius parallelogrammo μ ζ. Quare & linea δ μ eſt maior linea μ ν per. 1.6. Et eſt æquale parallelogrammū ex δ κ, κ μ quadrato lineæ μ ν hoc eſt quartæ parti quadrati lineæ μ ν, quia linea μ ν diuiſa eſt bifariam & æqualiter in puncto ν, & eſt linea δ κ longitudine commenſurabilis lineæ κ μ. Ergo per 18. linea δ μ plus poteſt quàm linea μ ν quadrato lineæ ſibi lon-

gitudine commenſurabilis.Sunt autem & lineæ δμ,μκ rationales potentia tantum commenſurabiles,& linea δμ,quæ eſt maius nomen,eſt longitudine commenſurabilis propoſitæ lineæ rationali δι.Ergo linea δκ eſt binomium primum.quod demonſtrandum erat.

Sexageſimumprimum Theorema.

Quadratum bimedialis primi ſecundum rationalem lineam applicatum facit alterum latus binomium ſecundum.



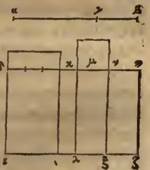
Sit bimediale primum linea αβ diuiſa in ſua nomina in puncto γ,quorum maius nomē ſit, αγ:& proponatur linea rationalis δι,ſecundũ quam applicetur æquale quadrato lineæ αβ parallelogrammũ δζ faciens alterum latus lineam δκ: dico lineã δκ eſſe binomiũ ſecundum.Sint enim eædem conſtructiones quæ in proximo theoremate,quoniam bimediale primum diuiſum eſt in ſua nomina in puncto γ.Quadrata linearum,αγ, γβ ſunt medialia.ergo parallelogrammum δλ eſt etiã mediale.Eſt ergo rationalis linea δμ, & incommenſurabilis longitudine lineæ δι per 23.Rurſus quoniam id quod fit bis ex αγ,γβ eſt rationale,etiam parallelogrãmum μζ erit rationale.Ergo linea μκ eſt rationalis & longitudine commenſurabilis lineæ μλ,hoc eſt lineæ δι. ergo linea δμ eſt longitudine incommenſurabilis lineæ

μκ

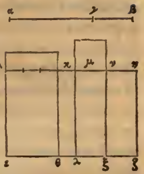
μκ,& ſunt rationales: ergo lineæ δμ,μκ ſunt rationales potentia tantum commenſurabiles. ergo linea δκ eſt binomium. demonſtremus illam eſſe binomium ſecundum. Quoniam quadrata linearum αγ,γβ ſunt maiora eo quod fit bis ex αγ,γβ. erit ergo parallelogrammũ δλ maius parallelogrãmo μζ. quare & linea δμ maior linea μκ. & quoniam quadratum lineæ αγ eſt commenſurabile quadrato lineæ γβ, etiam parallelogrammum δθ erit cõmenſurabile parallelogrammo κλ. quare & linea δκ erit commenſurabilis longitudine lineæ κμ: & eſt parallelogrammũ ex δκ,κμ æquale quadrato lineæ μν, hoc eſt quartæ parti quadrati lineæ μκ. Ergo linea δμ plus poteſt quàm linea μκ, quadrato lineæ ſibi commenſurabilis longitudine per 18. & eſt linea μκ longitudine commenſurabilis lineæ rationali δε. ergo linea δκ eſt binomium ſecundum.

Sexageſimumſecundum Theorema.

Quadratum bimedialis ſecundi ſecundum rationalem applicatũ, facit alterũ latus binomiũ tertiũ.



Sit bimediale ſecundum linea αβ diuiſa in ſua nomina in puncto γ: ita ut maius nomẽ ſit αγ. Sitq́; rationalis δε ſecundum quam quadrato lineæ αβ æquale applicetur parallelogrã mum δζ, faciẽs alterum latus lineam δκ. dico lineam δκ eſſe binomium tertium. Sint enim



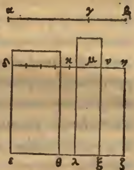
eadem conſtructiones, quæ in præcedentibus, quoniam linea α β eſt bimediale ſecundū, diuiſum in puncto γ in ſua nomina. ergo & cōpoſitū ex quadratis linearum α γ, γ β eſt mediale, eſtq́ue æquale parallelogrammo δ λ. ergo & δ λ erit mediale. ergo linea δ μ erit rationalis & longitudine incommēſurabilis lineæ δ ι per 23. Eadem ratione & linea μ κ erit rationalis & longitudine incōmēſurabilis lineæ μ λ, hoc eſt lineæ δ ι. ergo utraque linearum δ μ, μ κ eſt rationalis & incommenſurabilis longitudine lineæ δ ι. Et quoniam eſt incommenſurabilis longitudine linea α γ lineæ γ β: & ſicut linea α γ ad lineam γ β, ita & quadratum lineæ α γ ad parallelogrammū ex α γ, γ β per 1.6. Ergo & quadratum lineæ α γ erit incommenſurabile parallelogrammo ex α γ, γ β. Quare & compoſitum ex quadratis linearū α γ, γ β eſt incōmenſurabile ei quod fit bis ex α γ, γ β, hoc eſt parallelogrammum δ λ, parallelogrammo μ ζ. Quare & linea δ μ erit incommenſurabilis longitudine lineæ μ κ. Sunt autē ambæ rationales. tota ergo linea δ κ eſt binomium. Demonſtrandum eſt præterea illam eſſe binomium tertium. quemadmodum in ſuperioribus, ita hic cōcludemus lineam δ μ eſſe maiorem linea μ κ, eſſéque lineam δ κ longitudine commēſurabilem lineæ κ μ, eſſe etiam parallelogrammum ex δ κ, μ κ æquale quadrato lineæ μ ν. ergo & lineā δ μ plus poſſe quàm linea

μ κ

μκ quadrato lineæ ſibi commenſurabilis longitudine: & neutra ex δμ, μκ eſt longitudine commenſurabilis lineæ δι. ergo linea δκ eſt binomium tertium.

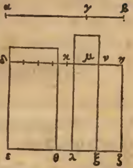
Sexageſimumtertium Theorema.

Quadratum lineæ maioris ſecundum lineam rationalem applicatum, facit alterum latus binomium quartum.



Sit linea maior αϐ diuiſa in ſua nomina in puncto γ, ita ut maius nomen ſit αγ, ſitq́; rationalis δι, & ſecundum lineam δι quadrato lineæ αϐ æquale applicetur parallelogrammum ζδ faciens alterū latus δκ. dico lineam δκ eſſe binomium quartum. Sint eædem conſtructiones quæ in præcedētibus.

& quoniam linea αβ eſt linea maior diuiſa in ſua nomina in puncto γ, lineæ αγ, γβ ſunt potentia incommenſurabiles, conficientes compoſitum ex quadratis ipſarū rationale: id uero quod fit ex ipſis, mediale. Cum igitur compoſitum ex quadratis linearum αγ, γϐ ſit rationale: ergo & parallelogrāmū δλ erit rationale. ergo & linea δμ erit rationalis & longitudine commenſurabilis lineæ δι. Rurſus cum id quod fit bis ex αγ, γβ, hoc eſt parallelogrammum μζ ſit mediale, & ſecūdum lineam rationalem μλ ſit applicatū: ergo & linea μκ erit rationalis, & longitudine incōmenſurabilis lineæ δι. ergo & linea δμ erit longitudine incommenſurabilis li-

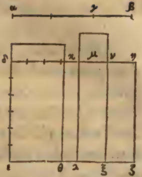


neæ μν. ergo lineæ δμ, μν ſunt rationales potentia tantum cõmẽſurabiles. ergo linea δν erit binomium. Demonſtrandum eſt illam præterea eſſe binomium quartũ ſimiliter, ut in præcedentibus concludetur lineam δμ eſſe maiorem linea μν. Cum igitur quadratum lineæ αγ ſit incõmẽſurabile quadrato lineæ γβ. ergo & parallelogrammum δθ erit incommẽſurabile parallelogrammo κλ. Quare & linea δκ erit longitudine incommenſurabilis lineæ κμ. Ergo per 19. linea δμ plus poteſt, quàm linea μν quadrato lineæ ſibi longitudine incõmenſurabilis: ſuntq́; lineæ δμ, μν rationales potentia tantum commenſurabiles, & linea δμ longitudine commenſurabilis lineæ propoſitæ rationali δε. ergo tota linea δν erit binomium quartum.

Sexageſimumquartum Theorema.

Quadratum lineæ potẽtis rationale & mediale ſecundum rationalem applicatum, facit alterum latus binomium quintum.

Sit linea potens rationale & mediale αβ diuiſa in ſua nomina in puncto γ, ita ut maius nomen ſit αγ: ſitq́; rationalis δε, & ſecũdum lineam δε quadrato lineæ αβ æquale applicetur parallelogrammum δζ, faciens alterũ latus lineã δν. dico lineam δν eſſe binomium quintum. Sint eædem conſtructiones quæ in præcedentibus. Cum igitur linea αβ ſit potẽs rationale & mediale diuiſa in ſuæ

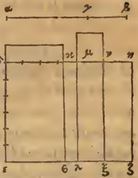


ſua nomina in pũcto γ, lineæ α γ, γ β ſunt potentia incommenſurabiles, conficientes compoſitum ex quadratis ipſarum, mediale: id uerò quod fit ex ipſis, rationale. Cum igitur compoſitũ ex quadratis linearum α γ, γ β ſit mediale, ergo parallelogrammũ δ λ erit etiam mediale. quare linea δ μ erit rationalis longitudine incommẽſurabilis lineæ δ ε. Rurſus cum id quod fit bis ex α γ, γ β ſit rationale, hoc eſt parallelogrammũ μ ζ, ergo linea μ η erit rationalis longitudine commẽſurabilis lineæ δ ε. Igitur linea δ μ eſt longitudine incommẽſurabilis lineæ μ η. Ergo lineæ δ μ, μ η erunt rationales potentia tantum commenſurabiles. ergo tota linea δ η erit binomiũ. dico præterea illam eſſe binomium quintũ. Similiter enim demonſtrabitur parallelogrammũ ex δ κ, κ μ eſſe æquale quadrato lineæ μ ν, & lineam δ κ eſſe longitudine incommenſurabilẽ lineæ κ μ. Ergo per 19. linea δ μ plus poteſt quàm linea μ η quadrato lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis: ſuntq́; lineæ δ μ, μ η rationales potentia tantum cõmẽſurabiles, eſtq́; minor linea μ η longitudine cõmẽſurabilis lineæ δ ε. ergo tota linea δ η erit binomiũ quintũ.

Sexageſimumquintum Theorema.

Quadratum lineæ potentis duo medialia ſecundũ rationalem applicatum, facit alterum latus binomium ſextum.

Sit linea potens duo medialia αβ diuiſa in ſua nomina in puncto γ, ſitq́; linea rationalis δε, ſecundum quam quadrato lineæ αβ æquale applicetur parallelogrã-mum δζ faciẽs alterũ latus δκ. dico lineã δκ eſſe binomiũ ſextum. Sint *eædem conſtructiones quæ in præcedentibus. quoniam*

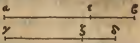


linea αβ eſt potens duo medialia diuiſa in ſua nomina in puncto γ, ſicut in cæteris dictum eſt, utrũque parallelogrammum δλ, μζ eſt mediale, & ſecundum lineã rationalem δε applicantur. ergo utraque linea δμ, μκ eſt rationalis & longitudine incommenſurabilis lineæ δε. Et quoniam compoſitum ex quadratis linearũ αγ, γβ eſt incõmẽſurabile ei quod fit bis ex αγ, γβ. Ergo & parallelogrammum δλ eſt incommenſurabile parallelogrammo μζ. ergo linea δμ eſt longitudine incommẽſurabilis lineæ μκ. ergo lineæ δμ, μκ ſunt rationales potẽtia tantum commẽſurabiles. ergo linea δκ eſt binomiũ. dico præterea illam eſſe binomium ſextum. Quemadmodum enim in cæteris eſt demonſtratum, ita hic etiam demonſtretur parallelogrammum ex δκ, κμ eſſe æquale quadrato lineæ μν, lineamq́; δκ eſſe longitudine incõmenſurabilem lineæ κμ, itaque per 19. lineam δμ plus poſſe quàm linea μκ quadrato lineæ ſibi incommenſurabilis longitudine. ſed neutra linearum δμ, μκ eſt longitudine commenſurabilis lineæ rationali δε. ergo tota linea δκ eſt binomium ſextum.

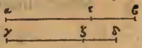
Sexa-

Sexageſimumſextum Theorema.

Linea longitudine commenſurabilis binomio eſt, & ipſa binomium eiuſdem ordinis.



Sit binomium linea αβ, ſitq́; ei longitudine commenſurabilis linea γδ. dico lineam γδ eſſe etiam binomium eiuſdem ordinis, cuius eſt & linea αβ. cũ enim linea αβ ſit binomium, diuidatur in ſua nomina in puncto ε, ſitq́; maius nomẽ αε. Ergo *lineæ αε, εβ ſunt rationales potentia tantum commenſurabiles, fiatq́; ſicut linea αβ ad lineam γδ, ita linea αε ad lineam γζ per 12. 6.* Ergo *& reſidua εβ ad reſiduam ζδ erit ſicut tota linea αβ ad totam lineã γδ per 19.5. Sed linea αβ eſt longitudine commẽſurabilis lineæ γδ. ergo etiam erit longitudine commenſurabilis linea αε lineæ γζ: & linea εβ lineæ ζδ per 10 huius. Sunt autem lineæ αε, εβ rationales. ſunt ergo etiam rationales lineæ γζ, ζδ.* Et *quoniam eſt ſicut linea αε ad lineam γζ, ita linea εβ ad lineã ζδ. permutata ergo proportione ſicut linea αε ad lineã εβ, ita linea γζ ad lineam ζδ, ſed lineæ αε, εβ ſunt potentia tantum commenſurabiles. ergo & lineæ γζ, ζδ, ſunt potentia tantum commẽſurabiles per 10 huius. Sunt autẽ & rationales: ergo linea tota γδ eſt binomium.* Dico *præterea eſſe binomium eiuſdem ordinis cuius & linea αβ. nam linea αε plus poteſt quàm linea εβ quadrato lineæ ſibi commenſurabilis longitudine, aut quadrato lineæ ſibi longitudine incommẽſurabilis. Si primum plus poteſt quadrato lineæ ſibi longitudine commenſurabi-*



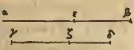
lis, ergo et linea γζ plus poterit, quàm linea ζδ, quadrato lineæ ſibi longitudine commenſurabilis per 15 huius. Et ſiquidem linea αε eſt longitudine commenſurabilis lineæ propoſitæ rationali: ergo linea γζ, quæ eſt longitudine commenſurabilis lineæ αε, erit inquam linea γζ etiam longitudine commenſurabilis eidem lineæ propoſitæ rationali per 12 huius, ob eamque cauſam utraque linea αβ, γδ eſt binomiū primum, hoc eſt utraque erit eiuſdem ordinis. Si uerò linea εβ eſt longitudine commenſurabilis lineæ propoſitæ rationali, ergo linea ζδ, quæ eſt longitudine commenſurabilis lineæ εβ, erit etiam longitudine commenſurabilis lineæ propoſitæ rationali, ob eamq; cauſam erit utraque binomiū ſecundum, hoc eſt utraque eiuſdem ordinis. Si uerò neutra linearum αε, εβ eſt longitudine cõmenſurabilis propoſitæ rationali, neutra etiam linearum γζ, ζδ erit eidē propoſitæ lineæ rationali commenſurabilis longitudine per 14 huius. ſic ergo utraque linea erit binomium tertium. Quòd ſi linea αε plus poteſt, quàm linea εβ quadrato lineæ ſibi longitudine incommēſurabilis, ergo & linea γζ plus poterit quàm linea ζδ, quadrato lineæ ſibi longitudine incõmenſurabilis per 15 huius. Et ſi quidem linea αε eſt longitudine commenſurabilis propoſitæ rationali, & linea γζ erit eidem rationali longitudine commenſurabilis: tunc erit utraque binomium quartū. Quòd ſi linea εβ fuerit rationali commenſurabilis longitudine, & linea ζδ erit eidem longitudine commenſurabilis: eritque hoc modo utraque binomium quintum.

Quòd

Quòd ſi neutra linearum α ε, ε β fuerit rationali commenſurabilis longitudine, neutra etiam γ ζ, ζ δ erit eidē commenſurabilis longitudine: eritq; utraque binomium ſextum. Quare linea longitudine commenſurabilis binomio, eſt etiam binomium eiuſdem ordinis.

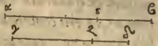
Sexageſimumſeptimum Theorema.

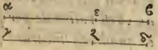
Linea longitudine commenſurabilis alteri bimedialium, eſt & ipſa bimediale etiā eiuſdē ordinis.



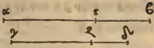
Sit bimediale linea α β: eidem ſit alia cōmēſurabilis lōgitudine γ δ. dico lineam γ δ eſſe etiā bimediale eiuſdem ordinis, cuius & linea α β. Diuidatur linea α β in ſua nomina in puncto ε, fiatq; ſicut linea α β ad lineam γ δ, ita linea α ε ad lineam γ ζ: reſidua ergo linea ε β erit ad lineam ζ δ ſicut tota linea α β ad totam γ δ: ſed linea α β eſt longitudine commenſurabilis lineæ γ δ. ergo & linea α ε erit longitudine commenſurabilis lineæ γ ζ, & linea ε β lineæ ζ δ. Sunt autē lineæ α ε, ε β mediales. ergo & lineæ γ ζ, ζ δ ſunt etiā mediales per 24. Et quoniam eſt ſicut linea α ε ad lineam ε β, ita linea γ ζ ad lineam ζ δ: ſed lineæ α ε, ε β ſunt potentia tantum commēſurabiles, ergo & lineæ γ ζ, ζ δ ſunt potētia tantum cōmenſurabiles. ſed modo probatum eſt eas etiam eſſe mediales, ergo tota linea γ δ erit etiā bimediale: dico præterea eſſe bimediale eiuſdē ordinis, cuius & linea α β. cum enim ſit ſicut linea α ε ad lineā ε β, ita linea γ ζ ad lineam ζ δ: ſitq; ſicut linea γ ζ ad lineā ζ δ, ita quadratū lineæ γ ζ ad ζ δ parallelogrammum ex γ ζ, ζ δ per 1.6.

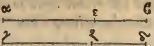
Sit linea maior αβ cui ſit commenſurabilis linea γδ quocunque modo,hoc eſt,ſiue ſit longitudine & potentia ſimul commenſurabilis, ſiue potentia tantum. Dico lineã γδ eſſe etiam lineã maiorẽ. Diuidatur linea αβ in ſua nomina in puncto ε,fiantq; cætera quemadmodum in ſuperioribus. Et quoniã eſt ſicut linea αβ ad lineam γδ:





ita & linea αε ad lineam γζ,& linea εβ ad lineã ζδ. ergo ſicut linea αε ad lineam γζ:ita linea εβ ad lineam ζδ. ſed linea αβ eſt commenſurabilis lineæ γδ. ergo & linea αε erit commenſurabilis lineæ γζ,& ſimiliter linea εβ lineæ ζδ. Et quoniam eſt ſicut linea αε ad lineã γζ,ita linea εβ ad lineã ζδ. permutata ergo proportione ſicut linea αε ad lineam εβ,ita linea γζ ad lineam ζδ. ergo ſicut quadratum lineæ αε ad quadratum lineæ εβ, ita quadratum lineæ γζ ad quadratũ lineæ ζδ,per 22. 6. Ergo per coniunctam proportionẽ(quæ probatur per 18.5.)ſicut compoſitum ex quadratis linearũ αε,εβ ad quadratum lineæ εβ,ita compoſitum ex quadratis linearum γζ,ζδ ad quadratũ lineæ ζδ. Ergo per contrariam proportionem ſicut quadratum lineæ εβ ad compoſitum ex quadratis linearum αε,εβ,ita quadratum lineæ ζδ ad compoſitum ex quadratis linearum γζ,ζδ. Ergo permutata proportione ſicut quadratum lineæ εβ ad quadratum lineæ ζδ,ita compoſitum ex quadratis linearum αε,εβ, ad compoſitũ ex quadratis linearum γζ,ζδ. Sed quadratũ lineæ εβ eſt cõmẽſurabile qua-





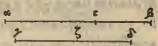
drato lineæ ζδ, quia modo probatũ eſt lineas εβ,ζδ eſſe cõmenſurabiles: ergo & cõpoſitum ex quadratis linearum αε,εβ erit commẽſurabile cõpoſito ex quadratis linearum γζ,ζδ. Sed compoſitum ex quadratis linearum αε,εβ eſt rationale per poſitionem. ergo & compoſitũ ex quadratis linearum γζ,ζδ erit etiam rationale. Sicut autem linea αε ad lineam εβ, ita linea γζ ad lineam ζδ. Sicut autem linea αε ad lineam εβ, ita quadratũ lineæ αε ad parallelogrammũ ex αε,εβ. ergo ſicut linea γζ ad lineam ζδ, ita quadratum lineæ αε ad parallelogrammum ex αε,εβ. ſed ſicut linea γζ ad lineam ζδ, ita quadratum lineæ γζ ad parallelogrammum ex γζ,ζδ: ergo ſicut quadratum lineæ αε ad parallelogrammũ ex αε,εβ, ita quadratũ lineæ γζ ad parallelogrammum ex γζ,ζδ. ergo permutata proportione ſicut quadratũ lineæ αε ad quadratum lineæ γζ, ita parallelogrammũ ex αε,εβ ad parallelogrammum γζ,ζδ. ſed quadratũ lineæ αε eſt commenſurabile quadrato lineæ γζ, quia modo probatum eſt lineas αε,γζ eſſe commenſurabiles, ergo & parallelogrammum ex αε,εβ erit commenſurabile parallelogrammo ex γζ,ζδ. ſed parallelogrammũ ex αε,εβ eſt mediale per poſitionem. ergo & parallelogrammũ ex γζ,ζδ erit etiam mediale per corollarium 24. Sed (ut modo probatum eſt) ſicut linea αε ad lineam εβ, ita linea γζ ad lineam ζδ: linea autẽ αε erat per ſuppoſitionem potentia incommẽſurabilis lineæ εβ.

ergo

ergo per 10 *& linea γζ erit potentia incommenſurabilis lineæ ζδ. Ergo lineæ γζ, ζδ ſunt potentia incommenſurabiles conficientes compoſitum ex quadratis ipſarũ rationale: id uero quod fit ex ipſis mediale. ergo tota linea γδ erit linea maior per* 39 *huius. ergo linea commẽſurabilis lineæ maiori erit & ipſa linea maior. In hoc theoremate* 68 *ideo perſequuti non ſumus demonſtrationẽ Theonis, quia difficilior uiſa eſt, & indigere lemmate ad id probandũ, quod pro demonſtrato ſumit, illis uerbis?* καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς αβ πρὸς τὰ ἀπὸ τῶν αε, εβ.

Sexageſimumnonum Theorema.

Linea cõmẽſurabilis lineæ potẽti rationale & mediale, eſt & ipſa linea potẽs rationale & mediale.

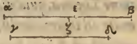


Sit linea potẽs rationale & mediale αβ, cui ſit commenſurabilis linea γδ, ſiue ſit longitudine & potentia ſiue potentia tantum commenſurabilis: dico etiam γδ eſſe lineam potentẽ rationale & mediale. Diuidatur linea αβ in ſua nomina in pũcto ε: ſint quoque eædem conſtrutiones quæ in præcedentibus. Similiter demonſtrabimus lineas γζ, ζδ eſſe potentia incõmenſurabiles, ſicut ſunt lineæ αε, εβ: & compoſitũ ex quadratis linearum αε, εβ eſſe commenſurabile compoſito ex quadratis linearum γζ, ζδ: item parallelogrammum ex αε, εβ eſſe commenſurabile parallelogrammo ex γζ, ζδ. Quare & compoſitum ex quadratis linearũ γζ, ζδ erit etiam mediale, ſicut compoſitũ ex quadratis linearum αε, εβ: item parallelogrammum ex γζ, ζδ

erit etiam rationale ſicut & parallelogrammũ ex αε, εβ. ergo linea γδ erit etiam linea potens rationale & mediale per 40.

Septuageſimum Theorema.

Linea commenſurabilis lineæ potenti duo medialia, eſt & ipſa linea potens duo medialia.



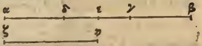
Sit linea potens duo medialia αβ, eiq; cõmenſurabilis linea γδ, ſiue ſit longitudine & potẽtia, ſiue potentia tantum commenſurabilis: dico lineam γδ eſſe etiam lineam potentem duo medialia. Diuidatur linea αβ in ſua nomina in puncto ε: ſint quoque eædem conſtructiones quæ in præcedentibus. Similiter demonſtrabimus lineas γζ, ζδ eſſe potentia incommenſurabiles, & compoſitum ex quadratis linearum αε, εβ eſſe cõmenſurabile compoſito ex quadratis linearũ γζ, ζδ: parallelogrammum uero ex αε, εβ eſſe commẽſurabile parallelogrammo ex γζ, ζδ. quare & compoſitũ ex quadratis linearum γζ, ζδ erit etiam mediale: & ſimiliter parallelogrammum ex γζ, ζδ erit mediale. Quòd autẽ compoſitum ex quadratis linearum γζ, ζδ ſit incommẽſurabile parallelogrãmo quod fit ex γζ, ζδ, ita probatur. Cum ſit enim ſicut compoſitum ex quadratis linearum αε, εβ ad quadratum lineæ αε, ita compoſitum ex quadratis linearum γζ, ζδ ad quadratum lineæ γζ (ut probatũ eſt in præcedentibus.) ergo permutata proportione, ſicut compoſitum ex quadratis linearũ αε, εβ ad compoſitum ex quadratis linearum γζ, ζδ, ita quadratum

tum lineæ α ι ad quadratũ lineæ γ ζ: ſed in ſuperioribus, nempe in 68 theoremate probatum eſt, ſicut quadratũ lineæ α ι ad quadratum lineæ γ ζ, ita parallelogrammũ ex α ι, ι ϐ ad parallelogrammum ex γ ζ, ζ δ. Ergo ſicut cõpoſitum ex quadratis linearum α ι, ι ϐ ad compoſitum ex quadratis linearum γ ζ, ζ δ, ita parallelogrammum ex α ι, ι ϐ ad parallelogrammum ex γ ζ, ζ δ. ergo permutata proportione ſicut compoſitum ex quadratis linearum α ι, ι ϐ ad parallelogrammum ex α ι, ι ϐ, ita compoſitum ex quadratis linearum γ ζ, ζ δ ad parallelogrammum ex γ ζ, ζ δ. Sed per ſuppoſitionẽ compoſitũ ex quadratis linearum α ι, ι ϐ eſt incommenſurabile parallelogrammo ex α ι, ι ϐ. ergo & compoſitum ex quadratis linearum γ ζ, ζ δ eſt incommenſurabile parallelogrammo ex γ ζ, ζ δ. Ergo linea γ δ eſt potens duo medialia.

Scholium.

Hactenus dictum eſt de ſenarijs ſex, quorum primus ſenarius cõtinet generationem linearum irrationalium per compoſitionem: ſecundus diuiſionem, nempe quòd hæ diuidantur in unico tantum puncto: tertius inuẽtionem binomiorum, primi inquam, ſecundi, tertij, quarti, quinti & ſexti, poſt quem incipit quartus ſenarius continẽs differentiam linearum irrationalium inter ſe. Nam ex uſu ſingulorum binomiorum demonſtrantur differentiæ irrationalium. Quintus autem docet de applicationibus quadratorum cuiuſq; lineæ irrationalis, ex qualibus ſcilicet irrationalibus ſint latitudines cuiuſque ſuperficiei applicatæ. In ſexto uerò ſenario dicitur ſingulas lineas ſingulis irrationalibus commenſurabiles, eſſe

etiam ipſas irrationales eiuſdem ſpeciei. Mox uero dicetur de ſeptimo ſenario, in quo reliquæ ipſarũ rurſus interſe differẽtiæ dilucide pertractantur. Exiſtit etiam in illis ipſis lineis irrationalibus proportionalitas arithmetica. eáque linea quæ ſumitur media proportionaliter ſecundum medietatem arithmeticam inter nomina cuiuſque lineæ irrationalis ſimiliter eſt irrationalis eiuſdẽ ſpeciei. Prius autem conſtat proportionalitatẽ arithmeticã inter illa nomina reperiri. Sit enim linea α β quæcunque ex dictis irrationalibus. uerbi gratia, ſit binomiũ, diuidaturq́; in ſua nomina in puncto γ: ſitq́; maius nomẽ α γ, de quo auferatur linea α δ æqualis minori nomini,



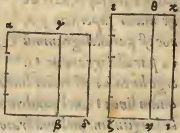
nempe γ β: diuidaturq́; linea γ δ bifariã & æqualiter in puncto ε: manifeſtum eſt lineam α ε eſſe æqualem lineæ ε β. Sit alterutri earũ æqualis linea ζ θ, manifeſtũ eſt, quanto differt linea α γ à linea ζ θ, tanto eandem lineam ζ θ differre à linea γ β. utrobique enim eſt differentia δ ε uel ε γ, quod eſt propriũ arithmeticæ proportionalitatis. Conſtat autem lineam ζ θ eſſe commenſurabilem longitudine lineæ α β, quia eſt eius dimidia quare per 66 linea ζ θ erit etiam binomium, eodémque modo demonſtrabitur de cæteris irrationalibus. Totum hoc ſcholium non reperitur in uetuſto.

Septuageſimumprimum Theorema.

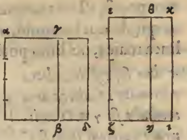
Si duæ ſuperficies rationalis & medialis ſimul cõponantur, linea quæ totam ſuperficiem compoſitam

tam poteſt, eſt una ex quatuor irrationalibus, uel ea quę dicitur binomiū, uel bimediale primū, uel linea maior, uel linea potēs rationale & mediale.

Sint duæ ſuperficies, altera rationalis α ϐ, altera uerò medialis ſit γ δ. Dico lineam potētem ſuperficiē α δ, eſſe uel binomiū, uel bimediale primū, uel lineam maiorem uel lineā

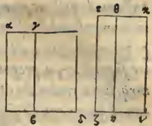


potentem rationale & mediale. Nam *ſuperficies α β, eſt uel maior uel minor ſuperficie γ δ: nā æquales eſſe nullo modo poſſunt, cū alia ſit rationalis, alia uerò medialis. Sit prius ea maior proponaturq; linea rationalis ε ζ, ſecundū quam æqualis ſuperficiei α β, applicetur ſuperficies parallelogramma rectangula ε η, faciens alterum latus ε θ: ſuperficiei autem γ δ æqualis ſecundum eandē lineam ε ζ, hoc eſt ſecūdum lineam θ η applicetur parallelogrammum θ ι, faciens alterum latus θ κ.* Cum *ſuperficies α β ſit rationalis, etiā parallelogrammum ε η erit rationale: ergo & linea ε θ erit rationalis & longitudine commenſurabilis lineæ ε ζ per* 21. R*urſus eadem ratione linea θ κ erit rationalis & longitudine incommēſurabilis lineæ ε ζ per* 23. *& quoniam ſuperficies α β eſt rationalis, ſuperficies uerò γ δ eſt medialis, ſuperficies α ϐ, hoc eſt parallelogrāmum ε η, eſt incōmenſurabile ſuperficiei γ δ: hoc eſt parallelogrāmo θ ι.* Ergo per 1.6 & 10. *huius linea ε θ eſt longitudine incommenſurabilis lineæ θ κ: ergo lineæ ε θ, θ κ ſunt rationales potētia tantum*



cõmenſurabiles. ergo tota linea ι κ eſt binomiũ diuiſum in ſua nomina in pũcto θ. ſed ſuperficies α ϐ eſt maior ſuperficie γ δ, hoc eſt parallelogrammũ ι κ parallelogrammo θ λ. ergo linea ι θ eſt maior linea θ κ. ſed linea ι θ plus poteſt quàm linea θ κ, uel quadrato lineæ ſibi commenſurabilis longitudine, uel quadrato lineæ ſibi longitudine incõmẽſurabilis. Prius autem poſsit plus ea quadrato lineæ ſibi commenſurabilis: eſt autem linea ι θ longitudine cõmẽſurabilis lineæ rationali ι ζ, (ut modo probatum eſt) ergo linea ι κ eſt binomiũ primum. Ergo per 54 linea potens ſuperficiem ι λ eſt binomium, quare & linea potens ſuperficiem α δ eſt binomium. Sed ſecundo loco linea ι θ plus poſsit quàm linea θ κ, quadrato lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis: ſitq́; maius nomen linea ι θ commenſurabile longitudine lineæ rationali ι ζ, ergo linea ι κ eſt binomium quartum. ſed linea ι ζ eſt rationalis, ergo per 57 linea potẽs ſuperficiẽ ι λ, eſt linea maior: quare & linea potens ſuperficiem α δ, eſt linea maior. Rurſus ſuperficies α β, quæ eſt rationalis, ſit minor ſuperficie γ δ, quæ eſt medialis, hoc eſt parallelogrammum ι κ parallelogrammo θ λ. Quare & linea ι θ erit minor linea θ κ: linea uero θ κ plus poteſt quàm linea ι θ, uel quadrato lineæ ſibi longitudine cõmẽſurabilis, uel quadrato lineæ ſibi longitudine incommẽſurabilis. Prius poſsit plus ea quadrato lineæ ſibi longitudine commenſurabilis, eſt

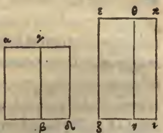
autem



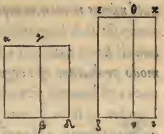
autē minus nomen, nempe ε θ cōmenſurabile longitudine rationali lineæ rationali ε ζ, ut modo probatum eſt: ergo linea ε κ eſt binomiū ſecundum. Ergo per 55 linea potens parallelogrammū ε ι, hoc eſt parallelogrammum α δ, eſt bimediale primū. Sed linea ε κ plus poſſit quàm linea ε θ quadrato lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis: ſitq; minus nomē ε θ commenſurabile longitudine lineæ rationali ε ζ, ergo linea ε κ eſt binomium quintum. ergo per 58 linea potens parallelogrammum ε ι, hoc eſt ei æquale α δ, erit linea potens rationale & mediale. Ergo ſi duæ ſuperficies rationalis & medialis &c.

Septuageſimumſecundum Theorema.

Si duæ ſuperficies mediales incommenſurabiles ſimul componantur, fiunt reliquæ duæ lineæ irrationales, uel bimediale ſecundum, uel linea potēs duo medialia.



Componantur duæ ſuperficies mediales incommenſurabiles inter ſe α β, γ δ. dico lineam potentem ſuperficiem α δ eſſe uel bimediale ſecundum, uel lineam potentē duo medialia. Nā ſuperficies α β eſt uel maior uel minor ſuperficie γ δ (æquales enim eſſe



nullo modo poſſunt, cum ſint incommenſurabiles.) Sit ergo *prius ſuperficies α β maior ſuperficie γ δ, proponaturq́; linea rationalis ε ζ ſecundũ quam æquale ſuperficiei α β applicetur parallelogrammum ε κ, faciens alterum latus ε θ: ſuperficiei uerò γ δ applicetur æquale parallelogrammum θ ι, faciens alterum latus θ κ: & quoniam utraque ſuperficies α β, γ δ eſt medialis: hoc eſt utrũque parallelogrammum ε κ, θ ι, ergo utraque linea ε θ, θ κ eſt rationalis & longitudine incommenſurabilis lineæ ε ζ.* Et *quoniam ſuperficies α β, γ δ ſunt incommenſurabiles, ergo eſt etiam incommenſurabile parallelogrammum ε κ parallelogrammo θ ι. ergo & lineæ ε θ, θ κ, ſunt longitudine incommẽſurabiles: ergo ſunt rationales potentia tantum commẽſurabiles.* Ergo *linea, ε κ, eſt binomium: ſimiliter autem ac in proximo theoremate demonſtratur lineam ε θ eſſe maiorẽ linea θ κ, qua linea ε θ plus poteſt, quàm linea θ κ, uel quadrato lineæ ſibi longitudine commenſurabilis, uel quadrato lineæ longitudine ſibi incommenſurabilis. Poſsit prius plus quadrato lineæ ſibi longitudine commenſurabilis: neutra autem linearũ ε θ, θ κ. eſt longitudine cõmenſurabilis lineæ rationali ε ζ: ergo linea ε κ eſt binomium tertium. ergo per 56. linea potens parallelogrammum ε ι, hoc eſt ei æquale α δ eſt bimediale ſecundũ. Sed linea ε θ poſsit plus, quàm linea θ κ quadrato lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis, eſt autem utraq; ε θ, θ κ*

longitudine

longitudine incommenſurabilis lineæ rationali ι ζ: ergo linea ι κ eſt binomium ſextum. Ergo per 59 *linea potens parallelogrammũ ι ι, hoc eſt κ λ eſt linea potens duo medialia.* Eadem *ratione ſi ſuperficies α ε fuerit minor ſuperficie γ λ, demonſtrabimus lineam potentem ſuperficiem α λ, eſſe uel bimediale ſecundum uel lineam potentem duo medialia.* Ergo *ſi duæ ſuperficies mediales &c. binomium & cæteræ conſequentes lineæ irrationales neque ſunt eædẽ cum linea mediali, neque ipſæ inter ſe.*

Nam *quadratum lineæ medialis applicatum ſecundũ lineam rationalem, facit alterum latus lineam rationalem, & longitudine incommenſurabilem lineæ, ſecũdum quam applicatur, hoc eſt lineæ rationali per* 23. Q*uadratum uero binomij ſecundum rationalem applicatum, facit alterum latus binomium primum per* 60. Q*uadratum uero bimedialis primi ſecundum rationalem applicatum, facit alterum latus binomiũ ſecũdum per* 61. Q*uadratum uerò bimedialis ſecundi ſecundum rationalem applicatum, facit alterum latus binomium tertium per* 62. Q*uadratum uerò lineæ maioris ſecundum rationalem applicatum, facit alterum latus binomium quartum per* 63. Q*uadratum uerò lineæ potentis rationale & mediale ſecũdum rationalem applicatũ, facit alterum latus binomium quintum per* 64. Q*uadratum uero lineæ potentis duo medialia ſecundum rationalem applicatum, facit alterum latus binomiũ ſextum per* 65. C*ũ igitur dicta latera, quæ latitudines uocantur, differant, & à prima latitudine quoniam eſt rationalis, cum inter ſe quoque differant, eo quia ſunt*

binomia diuerſorum ordinum: manifeſtum eſt ipſas lineas irrationales differentes eſſe inter ſe.

Secundus ordo alterius ſermonis, qui eſt de detractione.

Principium ſenariorum per detractionem.

Septuageſimumtertium Theorema.

Si de linea rationali detrahatur rationalis potentia tantum commenſurabilis ipſi toti, reſidua eſt irrationalis. Vocetur autem reſiduum.



De rationali αβ detrahatur rationalis ζγ, potētia tātū commenſurabilis toti αβ. dico reſiduam αγ eſſe irrationalem, quæ uocetur reſiduum. cum enim linea αβ ſit lōgitudine incōmenſurabilis lineæ βγ, ſitq́; ſicut linea αζ ad lineam βγ, ita quadratū lineæ αβ ad parallelogrāmum ex αζ, ζγ: ergo quadratum lineæ αβ erit incōmenſurabile parallelogrāmo ex αζ, βγ. ſed quadrato lineæ αζ ſunt commenſurabilia quadrata linearū αζ, βγ per 16. Ergo *quadrata linearū αβ, βγ ſunt incommenſurabilia parallelogrammo ex αβ, βγ per 14. ſed parallelogrammo ex αβ, βγ commēſurabile eſt ei quod fit bis ex αζ, ζγ.* Ergo *quadrata linearum αβ, ζγ ſunt incommenſurabilia ei quod fit bis ex αζ, ζγ. ſed quadrata linearū αβ, βγ ſunt æqualia ei quod fit bis ex αζ, βγ, & quadrato lineæ αγ, per 7.2. ergo id quod fit bis ex αζ, ζγ, cum quadrato lineæ αγ, eſt incommenſurabile ei quod fit bis ex αβ, ζγ.* Ergo *per ſecundam partem 17 id quod*

fit

ſit bis ex α β, β γ eſt incōmenſurabile quadrato lineæ α γ. ergo per primam partem eiuſdem 17 id quod ſit bis ex α β, β γ cum quadrato α γ, hoc eſt illi toti æqualia quadrata linearum α β, β γ ſunt incommenſurabilia quadrato lineæ α γ. Hoc *breuius cōcluditur per corollarium à nobis demonſtratum poſt* 17.*ſed quadrata linearum α β, β γ ſunt rationalia, quia lineæ α β, β γ poſitæ ſunt rationales. ergo linea α γ eſt irrationalis: uocetur autē reſiduum.* Hoc *uero theorema nihil aliud dicit, quàm portionem eam maioris nominis ipſius binomij, quæ remanet poſt detractionem minoris nominis de maiori, eſſe irrationalem: quæ uocatur reſiduum, hoc eſt ſi de maiori nomine ipſius binomij, quod maius nomen eſt linea rationalis potentia tantum commenſurabilis minori nomini, detrahatur minus nomen, quod ipſum eſt etiā cōmenſurabile potentia tantū maiori nomini (quod maius nomen hoc theorema uocat lineam totam) reſiduā lineam eſſe irrationalem, quam uocat reſiduum.* Itaque *omnes lineæ, de quibus agitur hoc theoremate, & cæteris quinque conſequētibus, ſunt reliquæ portiones maiorum nominum totarum linearum, de quibus actum eſt* 36.37.38.39.40 *&* 41 *poſt detractionem minoris nominis de maiori.*

Septuageſimumquartum Theorema.

Si de linea mediali detrahatur medialis potētia tantum cōmenſurabilis toti lineę, quæ uero detracta eſt cū tota cōtineat ſuperficiē rationalē, reſidua eſt irrationalis. uocetur autē reſiduū mediale primū.

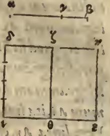


De linea mediali α β detrahatur medialis β γ potentia tantum commēſurabilis toti α β, quæ ſcilicet β γ cū α β contineat rationale, nempe parallelogrammū ex α β, β γ. Dico reliquā α γ eſſe irrationalem. Vocetur autem reſiduum mediale primum. Nam cum lineæ α β, β γ ſint mediales, quadrata illarum erunt medialia. ſed quod fit bis ex α β, β γ eſt rationale: ergò cōpoſitum ex quadratis linearū α β, β γ hoc eſt id quod fit bis ex α β, β γ, cum quadrato lineæ α γ eſt incommenſurabile ei quod fit bis ex α β, β γ. Ergo per ſecūdam partem 17. id quod fit bis ex α β, β γ, eſt incommēſurabile quadrato lineæ α γ. ſed id quod fit bis ex α β, β γ eſt rationale. ergo quadratum lineæ α γ eſt irrationale. ergo & linea α γ irrationalis. Vocetur autē reſiduum mediale primum. Eſt etiam hoc reſiduum mediale primū; reſidua portio maioris nominis bimedialis primi, poſt detractionem minoris nominis de maiori: unde & denominationem habet reſiduum mediale primum.

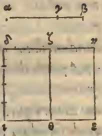
Septuageſimumquintum Theorema.

Si de linea mediali detrahatur medialis potētia tantum commenſurabilis toti, quæ uero detracta eſt cum tota contineat ſuperficiem medialem, reliqua eſt irrationalis. Vocetur autem reſiduum mediale ſecündum.

De linea mediali α β, detrahatur medialis β γ potentia tantum commenſurabilis toti α β, cum tota uerò α β continens ſuperficiem medialem, nempe parallelogrammum ex α β, β γ: dico reliquā α γ eſſe irrationalē. Vocetur autem



tem reſiduũ mediale ſecundũ. proponatur linea rationalis δι, & ſecundum illam quadratis linearum αβ, βγ æquale applicetur parallelogrammum δε, faciẽs alterum latus δκ. Et uerò quod fit bis ex αβ, βγ æquale ſecũdum eandem lineam δι, applicetur parallelogrammum δθ faciens alterum latus δζ. parallelogrammum δθ eſt minus parallelogrãmo δε: quia & quadrata linearum αβ, βγ ſunt maiora eo quod fit bis ex αβ, βγ tanto, quantũ eſt quadratum lineæ αγ per 7.2. Ergo & reſiduum nempe parallelogrammũ ζε, erit æquale quadrato lineæ αγ. Et quoniam quadrata linearum αβ, βγ ſunt commenſurabilia & medialia: ergo compoſitum ex ipſis parallelogrammum δε erit utrique quadrato commẽſurabile per 16. ergo & parallelogrammum δε, erit etiam mediale per corollarium 24 theorematis. ergo per 23 linea δκ erit rationalis longitudine incõmenſurabilis lineæ δι. Rurſus cum id quod fit ex αβ, βγ ſit mediale: etiam id quod fit bis ex iiſdem αβ, βγ erit mediale. ergo & illi æquale parallelogrammũ δθ erit mediale. Ergo & linea δζ erit rationalis potentia tantum commenſurabilis lineæ δι. Et cum linea αβ ſit longitudine incommenſurabilis lineæ βγ, ergo quadratum lineæ αβ erit incommẽſurabile parallelogrammo ex αβ, βγ per 1.6 & 10 huius. Sed quadrato lineæ αβ ſunt commenſurabilia quadrata linearũ αβ, βγ, parallelogrammo uero ex αβ, βγ eſt commenſurabile id, quod fit bis ex αβ, βγ. ergo quadra-



ta linearum α ϐ, β γ, hoc eſt parallelogrammum δ ι eſt incommẽſurabile ei, quod fit bis ex α ϐ, β γ, hoc eſt parallelogrãmo δ θ: ſed ſicut parallelogrammum δ ι ad parallelogrammum δ θ, ita linea δ κ ad lineam δ ζ. Ergo linea δ κ, eſt longitudine incõmẽſurabilis lineæ δ ζ: ſunt autẽ ambæ rationales. Ergo linea ζ κ eſt reſiduum per 73. ſed linea δ ι eſt rationalis: parallelogrammum uerò contentum ex linea rationali & irrationali eſt irrationale, per ea quæ ſcripta ſunt in fine demonſtrationis 38. Ergo parallelogrammum ζ ι, eſt irrationale: ergo & linea α γ, quæ illud parallelogrãmum poteſt eſt irrationalis. Vocatur autem reſiduũ mediale ſecundum: eſtq́; hoc reſiduum mediale ſecundum, reliqua portio maioris nominis ipſius bimedialis ſecundi poſt detractionem minoris nominis de maiori.

Septuageſimumſextum Theorema.

Si de linea recta detrahatur recta potentia incommenſurabilis toti, compoſitum autẽ ex quadratis totius lineæ & lineæ detractæ ſit rationale: parallelogrammum uerò ex iiſdem contentum ſit mediale, reliqua linea erit irrationalis; uocetur autem linea minor.



De linea recta α β, detrahatur recta β γ potentia incommenſurabilis toti α β, cuius totius inquam α β quadratum cum quadrato lineæ ϐ γ ſit rationale. Contentũ uero ex α β,

β γ

β γ ſit mediale, dico reſiduam lineam α γ eſſe irrationalem, quæ uocetur minor. Cum enim compoſitũ ex quadratis linearum α β, β γ ſit rationale, id uerò quod fit bis ex α β, β γ ſit mediale: ergo quadrata linearum α β, β γ ſunt incommenſurabilia ei, quod fit bis ex α β, β γ. ergo & reliquo quadrato ſcilicet lineæ α γ, erunt incommenſurabilia quadrata linearum α ζ, ζ γ, ſicut dictum eſt in 73. ſed quadrata linearum α β, ζ γ ſunt rationalia. ergo quadratum lineæ α γ erit irrationale, & linea α γ irrationalis: uocetur autẽ linea minor, ideo ſic dicta, quia eſt reliqua portio maioris nominis lineæ maioris poſt detractionem minoris nominis de maiori.

Septuageſimumſeptimum Theorema.

Si de linea recta detrahatur recta potentia incommenſurabilis toti lineæ, compoſitum autem ex quadratis totius & lineæ detractę ſit mediale: parallelogrammum uero ex eiſdem contentum ſit rationale, reliqua linea eſt irrationalis: uocetur autẽ linea faciẽs cum ſuperficie rationali totam ſuperficiem medialẽm totum mediale.

De linea recta α β, detrahatur recta β γ potentia incommẽſurabilis toti lineæ α β; ex quadratis quarum ſcilicet α γ, ζ γ compoſitum ſit mediale: parallelogrammum uerò ex eiſdem ſit rationale. dico reliquã lineam α γ eſſe irrationalẽ, quæ uocetur linea faciens cum ſuperficie rationali totam ſuperficiem medialem. Cum enim compoſitũ ex quadratis linearũ α ζ, β γ ſit mediale, id uerò quod fit bis ex α ζ,



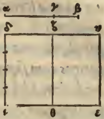


$\beta\gamma$ ſit rationale. Ergo compoſitum ex quadratis linearum $\alpha\beta,\beta\gamma$ erit incommẽſurabile ei quod fit bis ex $\alpha\beta,\beta\gamma$.Ergo & reliquum nempe $\alpha\gamma$ erit incommenſurabile ei,quod fit bis ex $\alpha\beta,\beta\gamma$ per 17.Eſt autem id quod fit bis ex $\alpha\beta,\beta\gamma$ rationale,ergo quadratum lineæ $\alpha\gamma$ erit irrationale, & linea $\alpha\gamma$ irrationalis.Vocetur autem faciẽs cum ſuperficie rationali totam medialem:ideo ſic dicta,quia compoſitum ex quadratis linearum $\alpha\beta,\beta\gamma$ eſt mediale, & totum quiddam,cuius pars eſt id quod fit ex $\alpha\beta,\beta\gamma$ exiſtens & ipſum rationale. Nam quadrata linearũ $\alpha\beta,\beta\gamma$ ſunt æqualia ei quod fit bis ex $\alpha\beta,\beta\gamma$, & quadrato lineæ $\alpha\gamma$ per 7.2. aut ideo ſit dicta eſt,quia quadratum eius iunctum cum ſuperficie rationali facit totã ſuperficiem medialem,ut intelligetur ex theoremate 109.In hac autem linea denominanda receſſimus à uoce recepta Campano, qui hãc lineã uocauit,iunctam cum rationali componentem totum mediale: idem faciemus in proximo theoremate,quia denominationes illæ Campani non ſatis conuenientes rebus ipſis eſſe uiſæ ſunt.

Septuageſimumoctauum Theorema.

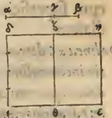
Si de linea recta detrahatur recta potentia incommenſurabilis toti lineæ,compoſitum autem ex quadratis totius & lineæ detractæ ſit mediale,parallelogrammum uerò ex eiſdem ſit etiam mediale:præterea ſint quadrata ipſarum incommẽſurabilia parallelogrammo ex iiſdem, reliqua linea eſt irrationalis;uocetur autem linea faciens cum

cum ſuperficie mediali totam ſuperficiem medialem.



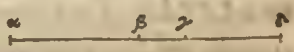
De linea αβ detrahatur recta βγ potentia incōmenſurabilis toti αβ ex quadratis, quarum compoſitū ſit mediale: parallelogrammū quoque ex eiſdem ſit mediale. præterea compoſitū ex quadratis linearum αβ, βγ ſit incommenſurabile parallelogrammo ex αβ, βγ. dico lineā reliquam αγ eſſe irrationalem. Vocetur autem faciens cum mediali ſuperficie totam medialē. Proponatur linea rationalis δι, ſecūdum quam quadratis linearum αβ, βγ, æquale applicetur parallelogrammū δε faciēs alterum latus δη: ei uerò quod fit bis ex αβ, βγ æquale applicetur δθ faciens alterum latus δζ, reſiduum ergo ζε erit æquale reſiduo, nempe quadrato lineæ αγ. quare linea αγ poteſt parallelogrammum ζε. Et quoniam compoſitum ex quadratis linearum αβ, βγ, hoc eſt δε eſt mediale, ergo linea δη eſt rationalis & longitudine incommenſurabilis lineæ δι. Rurſus cum id quod fit bis ex αβ, βγ, hoc eſt δθ ſit mediale: ergo & linea δζ erit rationalis & longitudine incommenſurabilis lineæ δι. Et quoniam quadrata linearum αβ, βγ ſunt incommenſurabilia ei quod fit bis ex αβ, βγ: ergo incommenſurabile etiam erit δε ipſi δθ. Ergo linea δη erit incommenſurabilis lineæ δζ: ſunt autem ambæ rationales. ergo lineæ δη, δζ ſunt rationales potentia tantum commenſurabiles. ergo ζη erit reſiduum per 73. Sed linea ζθ eſt rationalis, quia æqualis rationali δε: parallelogrammum

uerò cōtentum ex linea rationali & irrationali, nēpe ζι, eſt irrationale, per ea quæ ſcripta ſunt in fine demōſtrationis 38. ergo linea αγ, quæ illud poteſt, erit irrationalis: uocetur autē faciens cum ſuperficie mediali totam medialem. Ideo ſic dicta quia compoſitum ex quadratis linearum αβ, βγ eſt mediale & totum quiddam, cuius pars eſt id quod fit ex αβ, βγ, exiſtens & ipſum mediale: huius quoq; denominationis rationem aliam intelliges ex theoremate 110. Hic non eſt alienum inſerere lemma quoddā poſitum à Campano ante propoſit. 74. Illud tantum in eo emēdandū eſt, ut exceſſus linearū intelligatur ſecundum Arithmeticam proportionalitatem, nō autem ſecundū geometricā: itaque loco numeri 4. qui adſcribitur minime lineæ, reponatur binarius.



Septuageſimumnonum Theorema.

Reſiduo unica tantū linea recta coniungitur rationalis, potentia tantū commenſurabilis toti lineę.



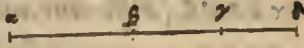
Sit reſiduum linea αβ, cōiungaturque ipſi linea βγ huiuſmodi, ut lineæ αγ, βγ ſint rationales potentia tantum commenſurabiles. Nego lineæ αβ aliam poſſe coniungi huiuſmodi, ut ſit rationalis potentia tantum commēſurabilis ipſi toti αγ. Si dicas aliam cōiungi poſſe, huiuſmodi ſit illa linea βδ: ergo lineæ αδ, δβ ſunt rationales potentia tantum commenſurabiles. Et quoniam quantò differunt quadrata linearum αδ, δβ ab eo quod fit bis

ex

ex α δ, δ ε, (differunt autem illa ab iſto quadrato lineæ α β per 7. 2.) tantò differunt & quadrata linearũ α γ, γ ε, ab eo quod fit bis ex α γ, γ β (differunt autẽ illa quoque ab iſto ſimiliter eodem quadrato lineæ α β, per 7, 2) Ergo & permutate per lemma poſitũ à Campano ante 74. quantò differunt quadrata linearũ α δ, δ ε, à quadratis linearum α γ, γ β, tantò differt id quod fit bis ex α δ, δ ε, ab eo quod fit bis ex α γ, γ β: ſed cõpoſitũ ex quadratis linearum α δ, δ β, & compoſitum ex quadratis linearum α γ, β γ cum ſint ambo rationalia differũt inter ſe ſuperficie rationali, per lemma poſitũ à nobis ante 42. Ergo & id quod fit bis ex α δ, δ β differet ab eo quod bis ex α γ, γ β ſuperficie rationali. Sed id quod fit bis ex α δ, δ ε eſt mediale, quia eſt cõmẽſurabile ei, quod fit ſemel ex α δ, δ β, quod ipſum eſt mediale per 22. Item eadem ratione id quod fit bis ex α γ, γ ε eſt mediale: ergo mediale differet à mediali ſuperficie rationali, quod eſt impoßibile per 27. Ergo lineæ α ε alia linea coniungi nõ poteſt, quàm linea ε γ potentia tantũ commenſurabilis toti: ergo reſiduo unica tantum linea &c. Deinceps per hanc uocem lineæ coniunctæ ſeu conueniẽter iunctæ intellige eam, quam Euclides uocat προσαρμόζουσαν: quæ ſcilicet iuncta cum reſiduo, reſtituit totam lineã, unde ea ablata remanent ſingula reſidua.

Octuageſimum Theorema.

Reſiduo mediali primo unica tantum linea coniungitur medialis, potentia tantum commenſurabilis toti, ipſa cum tota continens rationale.

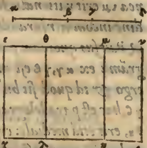
Sit reſiduū mediale primū αϐ, 

cui coniungatur linea βγ huiuſmodi, ut linea αγ, βγ ſint mediales potentia tantum commenſurabiles: quæ ſcilicet ϐγ cum tota αγ contineat rationale, nempe id quod fit bis ex αγ, ϐγ. Nego *aliam lineā huiuſmodi poſſe cōiungi lineæ αβ.* Nam *ſi fieri poſſe dicas, ſit illa linea βδ. ergo lineæ αδ, δβ ſunt mediales potentia tantum commenſurabiles, rationale continentes id quod fit ex αδ, δϐ.* Et *quoniā quanto excedit cōpoſitum ex quadratis linearū αδ, δβ id quod fit bis ex αδ, δϐ tanto excedit compoſitum ex quadratis linearū αγ, γβ id quod fit bis ex αγ, γβ. (utrobique enim excedunt quadrato lineæ αβ) ergo & permutate (ſicut dictum eſt in proximo theoremate) quātò compoſitum ex quadratis linearum αδ, δβ excedit compoſitū ex quadratis linearum αγ, γβ, tanto excedit id quod fit bis ex αδ, δβ id quod fit bis ex αγ, γϐ. ſed id quod fit bis ex αδ, δϐ eſt rationale: item id quod fit bis ex αγ, γβ eſt rationale. ergo id quod fit bis ex αδ, δβ excedit id quod fit bis ex αγ, γϐ ſuperficie rationali per lemma poſitū à nobis ante 42.* Ergo *& compoſitum ex quadratis linearū αδ, δβ, quod eſt mediale, ſicut dictum eſt in 75. excedit compoſitum ex quadratis linearum αγ, γϐ, quod ipſum eſt etiam mediale. (quia illæ quatuor lineæ poſitæ ſunt mediales) ſuperficie rationali, quod eſt impoſſibile per 27.* Ergo *reſiduo mediali primo &c.*

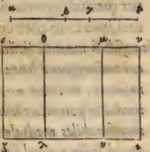
Octuageſimumprimum Theorema.

Reſiduo mediali ſecundo unica tantum coniungitur

tur medialis potentia tantum commenſurabilis toti, ipſa cum tota continens mediale.



Sit reſiduũ mediale ſecũdum αβ, *cui coniungatur linea* βγ *huiuſmodi, ut lineæ* αγ, βγ *ſint mediales potentia tãtum commenſurabiles mediale continẽtes, id ſcilicet quod fit ex* αγ, γβ. *Nego aliam lineam huiuſmodi poſſe coniungi lineæ* αβ: *nam ſi fieri poteſt, cõiungatur linea* βδ, *ergo lineæ* αδ, δβ *ſunt mediales potentia tantum cõmenſurabiles, mediale continentes id, quod fit ex* αδ, βδ. *Proponatur linea rationalis* εζ, *ſecundum quam quadratis linearum* αγ, γβ *æquale applicetur parallelogrammum* εκ, *faciẽs alterum latus* εμ: *ei uero quod fit bis ex* αγ, γβ *æquale auferatur parallelogrammum* θκ, *faciens alterum latus lineam* θμ. *ergo reſiduũ* ελ *eſt æquale quadrato lineæ* αβ, *per* 7.2. *quare linea* αβ *poteſt parallelogrammum* ελ. *Rurſus ſecundum eandem lineam* εζ, *quadratis linearũ* αδ, δβ *applicetur æquale parallelogrammũ* ει, *faciens alterũ latus* εν. *Sed quadrata linearum* αδ, δβ *ſunt æqualia ei, quod fit bis ex* αδ, δβ *& quadrato lineæ* αβ. *ergo parallelogrãmum* ει *eſt æquale ei, quod fit bis ex* αδ, δβ, *& quadrato lineæ* αβ. *Eſt autem* ελ *æquale quadrato lineæ* αβ. *ergo id quod fit bis ex* αδ, δβ *eſt æquale parallelogrammo* θι: *& quoniam lineæ* αγ, γβ *ſunt mediales, ergo & quadrata ipſarum ſunt medialia, & ſunt æqualia parallelogrãmo* εκ. *ergo* εκ



erit etiã mediale per ea quæ dicta ſunt in 75. Ergo per 23 linea ι μ erit rationalis, longitudine incommenſurabilis lineæ ι ζ. Rurſus quoniam parallelogrãmũ ex α γ, γ β eſt mediale, ergo & id quod fit bis ex α γ, γ ϐ, hoc eſt parallelogrammum θ κ, erit etiã mediale: ergo linea θ μ eſt rationalis, longitudine incommenſurabilis lineæ ι ζ. Et quoniã lineæ α γ, γ ϐ ſunt potentia tantum cõmenſurabiles, ergo ipſæ ſunt longitudine incommẽſurabiles. Sed ſicut linea α γ ad lineam γ ϐ, ita quadratum lineæ α γ ad parallelogrammum ex α γ, γ β. Ergo quadratum lineæ α γ erit incommenſurabile parallelogrammo ex α γ, γ ϐ. ſed quadrato lineæ α γ ſunt commẽſurabilia quadrata linearum α γ, γ β: parallelogrammo uerò ex α γ, γ β eſt commenſurabile id quod fit bis ex α γ, γ ϐ: ergo quadrata linearũ α γ, γ ϐ ſunt incommenſurabilia ei quod fit bis ex α γ, γ β. Eſt autẽ quadratis linearum α γ, γ β æquale parallelogrãmum ι κ: ei uero quod fit bis ex α γ, γ ϐ eſt æquale parallelogrammũ θ κ. Ergo parallelogrammum ι κ eſt incommenſurabile parallelogrammo θ κ, ergo & linea ι μ erit longitudine incommenſurabilis lineæ θ μ: ſunt autẽ ambæ rationales, ergo ſunt rationales potẽtia tantum cõmenſurabiles. Ergo linea ι θ eſt reſiduum, eique coniuncta linea θ μ rationalis, eſt toti lineæ ι μ rationali commenſurabilis potentia tantum. Similiter etiam probabimus cõiungi lineæ ι θ, lineam θ ν exiſtentem & ipſam

rationalem

rationalem potentia tantùm commenſurabilem toti ε γ, repetendo inquã proceſſum demonſtrationis ab illis uerbis. Et quoniam lineæ α γ, γ β ſunt mediales: &c. loco linearum α γ, γ β reponendo lineas α δ, δ β, &c. cætera ſimiliter. ergo reſiduo alia atque alia linea coniungitur rationalis potentia tantum commenſurabilis toti, quod eſt impoſsibile per 79. Ergo reſiduo mediali ſecundo &c.

Octuageſimumſecundum Theorema.

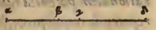
Lineæ minori unica tantum recta coniungitur, potentia incommenſurabilis toti, faciens cum tota compoſitum ex quadratis ipſarum rationale: id uerò parallelogrãmũ, quod ex ipſis fit, mediale.

Sit linea minor α β, ſitq; illi cõiuncta linea β γ, qualis ponitur in



theoremate. ergo lineæ α γ, γ β ſunt potentia incommenſurabiles, faciẽtes compoſitum ex quadratis ipſarũ rationale. Id uero quod fit ex ipſis mediale, nego lineæ α β aliam lineam poſſe coniungi, quæ idem efficiat. nam ſi fieri poteſt, ſit ei coniuncta linea β δ. ergo lineæ α δ, δ β ſunt potentia incommenſurabiles, faciẽtes compoſitum ex quadratis ipſarum rationale: id uero quod fit ex ipſis mediale. Et quoniam quãto compoſitum ex quadratis ipſarum excedit id quod fit bis ex ipſis, tanto excedit compoſitum ex quadratis linearũ α γ, γ β, id quod fit bis ex ipſis α γ, γ β. Et permutate ſicut in 79 theoremate quanto differt compoſitum ex quadratis linearum α δ, δ β compoſitum ex quadratis linearũ α γ, γ β, tanto differt id quod fit bis ex α δ, δ β, id quod fit bis ex α γ, γ β: ſed

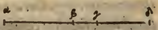
compoſitum ex quadratis linearum α δ, δ β excedit compoſitum ex quadratis linearum α γ, γ β, ſuperficie rationali, quia utrunque compoſitum eſt rationale. ergo id quod fit bis ex α δ, δ β excedit id, quod fit bis ex α γ γ β ſuperficie rationali, cũ tamẽ utrunque ſit mediale, quod eſt impoſsibile. ergo lineæ minori &c.



Octuageſimumtertium Theorema.

Lineæ facienti cum ſuperficie rationali totã ſuperficiem medialem, unica tantum coniungitur linea recta potentia incõmenſurabilis toti: faciens autem cum tota compoſitũ ex quadratis ipſarũ mediale, id uero quod fit ex ipſis rationale.

Sit linea cũ rationali ſuperficie faciens totam ſuperficiem medialem α β, eiq; coniuncta ſit β γ: ergo lineæ α γ, γ β, ſunt potentia incommenſurabiles, facientes compoſitum ex quadratis ipſarum mediale, id uerò quod fit ex ipſis rationale. Nego lineæ α β aliam lineam poſſe coniungi quæ idem efficiat: nam ſi poſsibile eſt, ſit illa cõiuncta β δ. ergo lineæ α δ, δ β ſunt lineæ potẽtia incommenſurabiles, faciẽtes compoſitum ex quadratis ipſarum mediale, id uerò quod fit ex ipſis rationale. Cum igitur compoſitum ex quadratis linearum α δ, δ β tanto excedat compoſitũ ex quadratis linearum α γ, γ β, quanto id quod fit bis ex α δ, δ β excedit, quod fit bis ex α γ, γ β, ſicut dictum eſt in præcedentibus: ſed id quod fit bis ex α δ, δ β excedit id, quod fit bis ex α γ, γ β ſuperficie rationali, cum ſit utrũq; rationale

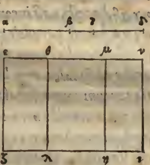


rationale. ergo & compoſitum ex quadratis linearum α δ, δ ϐ excedit compoſitum ex quadratis linearum α γ, γ ϐ ſuperficie rationali, cum tamen utrunque ſit mediale, quod eſt impoßibile. Non igitur alia linea cõiungi poteſt *lineæ α ϐ, quàm linea ϐ γ, quæ idẽ efficiat. ergo lineæ facienti cum rationali &c.*

Octuageſimumquartum Theorema.

Lineæ cum mediali ſuperficie faciẽti totam ſuperficiem medialem, unica tantum coniungitur linea potentia toti incommenſurabilis, faciẽs cum tota compoſitum ex quadratis ipſarum mediale, id uero quod fit ex ipſis etiam mediale: & prætérea faciens compoſitum ex quadratis ipſarum incommenſurabile ei, quod fit ex ipſis.

Sit linea cum mediali ſuperficie faciens totã medialem α ϐ, cui cõiungatur linea ϐ γ potẽtia toti incommẽſurabilis, faciantq́; ambæ id quod dicitur in theoremate. Nego *lineæ α ϐ aliam lineã cõiungi poſſe, quæ idem efficiat: nam ſi poßibile eſt, cõiungatur linea ϐ δ, quæ idẽ efficiat quod linea ϐ γ: proponaturq́; linea rationalis ε ζ, ſecũdum quam quadratis linearum α γ, γ ϐ æquale applicetur parallelogrammum ε ν, faciens alterũ latus ε μ: ei uerò quod fit bis ex α γ, γ ϐ æquale detrahatur parallelogrammũ θ ν, faciens alterum latus θ μ. reſiduum ergo nempe quadratum li-*





neæ αβ eſt æquale parallelogrammo ελ. ergo linea αβ poteſt parallelogrammũ ελ. Rurſus ſecundum eandem lineam εζ, quadratis linearum αδ, δβ æquale applicetur parallelogrammum ει, faciens alterum latus εν: eſt autem quadratum lineæ αβ æquale parallelogrãmo ελ: ergo reſiduũ, nempe id quod fit bis ex αδ, δβ, eſt æquale parallelogrammo θι. Et quoniam compoſitum ex quadratis linearum αγ, γβ, hoc eſt εη, eſt mediale: ergo linea εμ eſt rationalis longitudine incommenſurabilis lineæ εζ. Rurſus quoniã id quod fit bis ex αγ, γβ, hoc eſt θη, eſt mediale: ergo & linea θμ eſt rationalis longitudine incõmenſurabilis lineæ εζ. Et quoniam compoſitum ex quadratis linearũ αγ, γβ, hoc eſt εη, eſt incommenſurabile ei quod fit bis ex αγ, γβ, hoc eſt parallelogrãmo θη: ergo & lineæ εμ, θμ ſunt longitudine inter ſe incommenſurabiles. ſunt autẽ ambæ rationales, ergo lineæ εμ, θμ ſunt rationales potẽtia tantum commẽſurabiles. Ergo linea εθ eſt reſiduum per 73: coniuncta uerò ei erit linea θμ. Similiter etiam probabimus lineam εθ eſſe reſiduum coniunctã ei uerò eſſe lineam θν, repetendo proceſſum huius demonſtrationis ab illis uerbis. Et quoniã cõpoſitũ ex quadratis linearũ αγ &c. ut diximus in theoremate 81. Ergo reſiduo alia atq; alia linea cõiungitur idẽ efficiẽs, quod eſt impoſsibile per 79. Nõ ergo lineæ αβ alia linea, quã βγ coniungi poteſt ſimilis naturæ, & quæ idem efficiat.

Definitiones

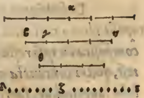
Definitiones tertiæ, ſiue termini tertij.

Propoſita linea rationali & reſiduo, ſiquidem tota, nempe compoſita ex ipſo reſiduo & linea illi cõiuncta, plus poteſt, quàm coniuncta quadrato lineæ ſibi commenſurabilis longitudine, fueritq́; tota longitudine commenſurabilis lineæ propoſitæ rationali: reſiduum ipſum uocetur reſiduum primum. Si uerò coniuncta fuerit longitudine commenſurabilis rationali, ipſa autem tota plus poſsit quàm coniuncta quadrato lineæ ſibi longitudine commenſurabilis, reſiduum uocetur reſiduum ſecundũ. Si uero neutra linearum fuerit longitudine commenſurabilis rationali, poſsit autem ipſa tota plus quàm coniuncta quadrato lineæ ſibi longitudine commenſurabilis, uocetur reſiduum tertium. Rurſus ſi tota poſsit plus, quàm coniuncta quadrato lineæ ſibi longitudine incõmenſurabilis: & quidem ſi tota fuerit longitudine commenſurabilis ipſi rationali, uocetur reſiduũ quartum. Si uerò coniuncta fuerit longitudine commenſurabilis rationali, & tota plus poſsit quàm coniuncta quadrato lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis, uocetur reſiduum quintum. Si uerò neutra linearum fuerit commenſurabilis lõgitudine ipſi rationali, fueritq́; tota potentior, quàm coniuncta quadrato lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis, uocetur reſiduum ſextum.

Octuageſimumquintum Theorema.

Reperire primum reſiduum.

Proponatur linea rationalis α, cui ſit longitudine commẽſurabilis linea ϛ ϰ*: ergo & linea* ϛ ϰ *erit rationalis. Sint*



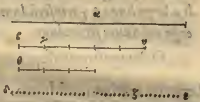
duo numeri quadrati δ ε, ε ζ tales, ut exceſſus maioris δ ζ, ne ſit quadratus numerus, per corollarium primi lemmatis poſt 29. Neq; ergo numerus ε δ ad numerum δ ζ habebit proportionẽ, quã numerus quadratus ad numerũ quadratũ, per 24. 8. à deſtructione conſequẽtis. Sitq; ſicut numerus ε δ ad numerum δ ζ, ita quadratũ lineæ β η, ad quadratũ lineæ η γ, per lemma poſitum poſt 6. ergo quadratum lineæ β η eſt commenſurabile quadrato lineæ η γ: ſed quadratũ lineæ β η eſt rationale, ergo & quadratũ lineæ η γ erit rationale. ergo linea η γ erit etiam rationalis. Et quoniam numerus ε δ ad numerum δ ζ non habet proportionem, quam numerus quadratus ad quadratum, neq; etiam quadratũ lineæ β η habebit proportionem ad quadratum lineæ η γ, quam numerus quadratus ad quadratũ. ergò linea β η erit longitudine incommenſurabilis lineæ η γ per 9. Sunt autem ambæ rationales, ergo ſunt lineæ β η, η γ rationales potentia tantum commẽſurabiles. ergo linea β γ eſt reſiduum: dico præterea eandem eſſe reſiduum primũ. Quò enim eſt maius quadratum lineæ β η quadrato lineæ η γ (maius autem eſſe conſtat, quia quadratum lineæ β η, ad quadratum lineæ η γ eſt, ſicut numerus ε δ, maior, ad numerum δ ζ ex ſuppoſitione:) quò ergo quadratum lineæ β η eſt maius quadrato lineæ η γ, ſit quadratum lineæ θ. Et quoniam eſt ſicut numerus δ ε ad numerum δ ζ, ita quadratum lineæ β η ad quadratum lineæ η γ. per euerſam ergo proportionem ſicut numerus

δ ε

δι ad numerum ιζ, ita quadratum lineæ βκ ad quadratum lineæ θ: ſed numerus δι habet proportionẽ ad numerum ζι, quam numerus quadratus ad quadratũ, quia eſt uterque quadratus, ergo & quadratum lineæ κβ habebit proportionem ad quadratum lineæ θ, quam quadratus numerus ad quadratum. ergo linea κβ eſt longitudine commenſurabilis lineæ θ. Poteſt autẽ linea κβ plus, quàm linea κγ quadrato lineæ ſibi longitudine commenſurabilis: eſt autem tota βκ longitudine commenſurabilis rationali α. ergo linea βγ eſt reſiduũ primum. Repertum *eſt igitur reſiduum primum, quod faciendum erat.*

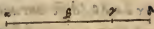
Octuageſimumſextum Theorema.

Reperire ſecundum reſiduum.



P*roponatur linea rationalis α, cui ſit cõmẽſurabilis longitudine linea κγ: ſintq́; numeri quadrati duo δι, ιζ, quorum exceſſus δζ ne ſit quadratus: ſit etiã ſicut numerus δζ ad numerum δι, ita quadratum lineæ κγ ad quadratum lineæ κβ, ergo ambo quadrata ſunt cõmenſurabilia: & quia quadratum lineæ κγ eſt rationale, etiam quadratum lineæ βκ erit rationale. ergo & linea βκ erit rationalis.* Et *quia quadrata linearũ βκ, κγ non habent proportionem inter ſe, quam numerus quadratus ad quadratum, ergo lineæ βκ, κγ erunt longitudine incõmenſurabiles, & ſunt ambæ rationales. ergo lineæ βκ, κγ erũt*

Sit reſiduũ mediale primũ α ϐ, cui coniungatur linea β γ hu

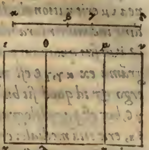


iuſmodi, ut lineæ α γ, ϐ γ ſint mediales potentia tantum commenſurabiles: quæ ſcilicet ϐ γ cum tota α γ contineat rationale, nempe id quod fit bis ex α γ, ϐ γ. Nego aliam li*neã huiuſmodi poſſe cõiungi lineæ α β.* Nam *ſi fieri poſſe dicas, ſit illa linea β δ. ergo lineæ α δ, δ β ſunt mediales potentia tantum commenſurabiles, rationale continentes id quod fit ex α δ, δ ϐ.* Et *quoniã quanto excedit cõpoſitum ex quadratis linearũ α δ, δ β id quod fit bis ex α δ, δ ϐ tanto excedit compoſitum ex quadratis linearũ α γ, γ β id quod fit bis ex α γ, γ β. (utrobique enim excedunt quadrato lineæ α β) ergo & permutate (ſicut dictum eſt in proximo theoremate) quãtò compoſitum ex quadratis linearum α δ, δ β excedit compoſitũ ex quadratis linearum α γ, γ β, tanto excedit id quod fit bis ex α δ, δ β id quod fit bis ex α γ, γ ϐ. ſed id quod fit bis ex α δ, δ ϐ eſt rationale: item id quod fit bis ex α γ, γ β eſt rationale. ergo id quod fit bis ex α δ, δ β excedit id quod fit bis ex α γ, γ ϐ ſuperficie rationali per lemma poſitũ à nobis ante 42.* Ergo *& compoſitum ex quadratis linearũ α δ, δ β, quod eſt mediale, ſicut dictum eſt in 75. excedit compoſitum ex quadratis linearum α γ, γ ϐ, quod ipſum eſt etiam mediale. (quia illæ quatuor lineæ poſitæ ſunt mediales) ſuperficie rationali, quod eſt impoſsibile per 27.* Ergo *reſiduo mediali primo &c.*

Octuageſimumprimum Theorema.

Reſiduo mediali ſecundo unica tantum coniungi-

tur medialis potentia tantum commenſurabilis toti, ipſa cum tota continens mediale.



Sit reſiduū mediale ſecūdum αβ, cui coniungatur linea βγ huiuſmodi, ut lineæ αγ, βγ ſint mediales potentia tātum commenſurabiles mediale continētes, id ſcilicet quod fit ex αγ, γβ. Nego aliam lineam huiuſmodi poſſe coniungi lineæ αβ: nam ſi fieri poteſt, cōiungatur linea βδ, ergo lineæ αδ, δβ ſunt mediales potentia tantum cōmenſurabiles, mediale continentes id, quod fit ex αδ, βδ. Proponatur linea rationalis εζ, ſecundum quam quadratis linearum αγ, γβ æquale applicetur parallelogrammum εκ, faciēs alterum latus εμ: ei uero quod fit bis ex αγ, γβ æquale auferatur parallelogrammum θκ, faciens alterum latus lineam θμ. ergo reſiduū ελ eſt æquale quadrato lineæ αβ, per 7.2. quare linea αβ poteſt parallelogrammum ελ. Rurſus ſecundum eandem lineam εζ, quadratis linearū αδ, δβ applicetur æquale parallelogrammū ει, faciens alterū latus εν. Sed quadrata linearum αδ, δβ ſunt æqualia ei, quod fit bis ex αδ, δβ & quadrato lineæ αβ. ergo parallelogrāmum ει eſt æquale ei, quod fit bis ex αδ, δβ, & quadrato lineæ αβ. Eſt autem ελ æquale quadrato lineæ αβ. ergo id quod fit bis ex αδ, δβ eſt æquale parallelogrammo θι: & quoniam lineæ αγ, γβ ſunt mediales, ergo & quadrata ipſarum ſunt medialia, & ſunt æqualia parallelogrāmo εκ. ergo εκ



erit etiã mediale per ea quæ dicta ſunt in 75. Ergo per 23 linea ε μ erit rationalis, longitudine incommenſurabilis lineæ ε ζ. Rurſus quoniam parallelogrãmũ ex α γ, γ β eſt mediale, ergo & id quod fit bis ex α γ, γ δ, hoc eſt parallelogrammum θ κ, erit etiã mediale: ergo linea θ μ eſt rationalis, longitudine incommenſurabilis lineæ ε ζ. Et quoniã lineæ α γ, γ δ ſunt potentia tantum cõmenſurabiles, ergo ipſæ ſunt longitudine incommẽſurabiles. Sed ſicut linea α γ ad lineam γ δ, ita quadratum lineæ α γ ad parallelogrammum ex α γ, γ δ. Ergo quadratum lineæ α γ erit incommenſurabile parallelogrammo ex α γ, γ δ. ſed quadrato lineæ α γ ſunt commẽſurabilia quadrata linearum α γ, γ β: parallelogrammo uerò ex α γ, γ β eſt commenſurabile id quod fit bis ex α γ, γ δ: ergo quadrata linearũ α γ, γ δ ſunt incommenſurabilia ei quod fit bis ex α γ, γ β. Eſt autẽ quadratis linearum α γ, γ β æquale parallelogrãmum ε κ: ei uero quod fit bis ex α γ, γ δ eſt æquale parallelogrammũ θ κ. Ergo parallelogrammum ε κ eſt incommenſurabile parallelogrammo θ κ, ergo & linea ε μ erit longitudine incommenſurabilis lineæ θ μ: ſunt autẽ ambæ rationales, ergo ſunt rationales potẽtia tantum cõmenſurabiles. Ergo linea ε θ eſt reſiduum, eique coniuncta linea θ μ rationalis, eſt toti lineæ ε μ rationali commenſurabilis potentia tantum. Similiter etiam probabimus cõiungi lineæ ε θ, lineam θ ι exiſtentem & ipſam

rationalem

rationalem potentia tantùm commenſurabilem toti ϐγ, repetendo inquã proceſſum demonſtrationis ab illis uerbis. Et quoniam lineæ α γ, γ β ſunt mediales: & loco linearum α γ, γ β reponendo lineas α δ, δ ϐ, & cætera ſimiliter. ergo reſiduo alia atque alia linea coniungitur rationalis potentia tantum commenſurabilis toti, quod eſt impoßibile per 79. Ergo reſiduo mediali ſecundo &c.

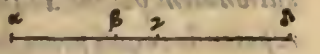
Octuageſimumſecundum Theorema.

Lineæ minori unica tantùm recta coniungitur, potentia incommenſurabilis toti, faciens cum tota compoſitum ex quadratis ipſarum rationale: id uerò parallelogrãmũ, quod ex ipſis fit, mediale.

Sit linea minor α ϐ, ſitq; illi cõiuncta linea ϐ γ, qualis ponitur in



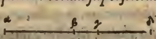
theoremate. ergo lineæ α γ, γ β ſunt potentia incommenſurabiles, faciẽtes compoſitum ex quadratis ipſarũ rationale. Id uero quod fit ex ipſis mediale, nego lineæ α ϐ aliam lineam poſſe coniungi, quæ idem efficiat. nam ſi fieri poteſt, ſit ei coniuncta linea β δ: ergo lineæ α δ, δ ϐ ſunt potentia incommenſurabiles, faciẽtes compoſitum ex quadratis ipſarum rationale: id uero quod fit ex ipſis mediale. Et quoniam quãto compoſitum ex quadratis ipſarum excedit id quod fit bis ex ipſis, tanto excedit compoſitum ex quadratis linearũ α γ, γ β, id quod fit bis ex ipſis α γ, γ β. Et permutate ſicut in 79 theoremate quanto differt compoſitum ex quadratis linearum α δ, δ β compoſitum ex quadratis linearũ α γ, γ ϐ, tanto differt id quod fit bis ex α δ, δ ϐ, id quod fit bis ex α γ, γ ϐ: ſed



compoſitum ex quadratis linearum α δ, δ β excedit compoſitum ex quadratis linearum α γ, γ β, ſuperficie rationali, quia utrunque compoſitum eſt rationale. ergo id quod fit bis ex α δ, δ β excedit id, quod fit bis ex α γ γ β ſuperficie rationali, cũ tamẽ utrunque ſit mediale, quod eſt impoſsibile. ergo lineæ minori &c.

Octuageſimumtertium Theorema.

Lineæ facienti cum ſuperficie rationali totã ſuperficiem medialem, unica tantum coniungitur linea recta potentia incõmenſurabilis toti: faciens autem cum tota compoſitũ ex quadratis ipſarũ mediale, id uero quod fit ex ipſis rationale.



Sit linea cũ rationali ſuperficie faciens totam ſuperficiem medialem α β, eiq; coniuncta ſit β γ: ergo lineæ α γ, γ β, ſunt potentia incommenſurabiles, facientes compoſitum ex quadratis ipſarum mediale, id uerò quod fit ex ipſis rationale. Nego lineæ α β aliam lineam poſſe coniungi quæ idem efficiat: nam ſi poſsibile eſt, ſit illa cõiuncta β δ. ergo lineæ α δ, δ β ſunt lineæ potẽtia incommenſurabiles, faciẽtes compoſitum ex quadratis ipſarum mediale, id uerò quod fit ex ipſis rationale. Cum igitur compoſitum ex quadratis linearum α δ, δ β tanto excedat compoſitũ ex quadratis linearum α γ, γ β, quanto id quod fit bis ex α δ, δ β excedit, quod fit bis ex α γ, γ β, ſicut dictum eſt in præcedentibus: ſed id quod fit bis ex α δ, δ β excedit id, quod fit bis ex α γ, γ β ſuperficie rationali, cum ſit utrũq;

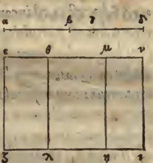
rationale

rationale. ergo & compoſitum ex quadratis linearum α δ, δ β excedit compoſitum ex quadratis linearum α γ, γ β ſuperficie rationali, cum tamen utrunque ſit mediale, quod eſt impoßibile. Non *igitur alia linea cõiungi poteſt lineæ α β, quàm linea β γ, quæ idẽ efficiat. ergo lineæ facienti cum rationali &c.*

Octuageſimumquartum Theorema.

Lineæ cum mediali ſuperficie facičti totam ſuperficiem medialem, unica tantum coniungitur linea potentia toti incommenſurabilis, faciés cum tota compoſitum ex quadratis ipſarum mediale, id uero quod fit ex ipſis etiam mediale: & preterea faciens compoſitum ex quadratis ipſarum incommenſurabile ei, quod fit ex ipſis.

Sit linea cum mediali ſuperficie faciens totã medialem α β, cui cõiungatur linea β γ potẽtia toti incommẽſurabilis, faciantq́; ambæ id quod dicitur in theoremate. Nego *linea α β aliam lineã cõiungi poſſe, quæ idem efficiat: nam ſi poßibile eſt, cõiungatur linea β δ, quæ idẽ efficiat quod linea β γ: proponaturq́; linea rationalis ε ζ, ſecũdum quam quadratis linearum α γ, γ β æquale applicetur parallelogrammum ε κ, faciens alterũ latus ε μ: ei uerò quod fit bis ex α γ, γ β æquale detrahatur parallelogrammũ θ κ, faciens alterum latus θ μ. reſiduum ergo nempe quadratum li-*





neæ α ϐ eſt æquale parallelogrammo ε λ. ergo linea α β poteſt parallelogrammũ ε λ. Rurſus ſecundum eandem lineam ε ζ, quadratis linearum α δ, δ β. æquale applicetur parallelogrammum ε ι, faciens alterum latus ε ν: eſt autem quadratum lineæ α β æquale parallelogrãmo ε λ: ergo reſiduũ, nempe id quod fit bis ex α δ, δ β, eſt æquale parallelogrammo θ ι. Et quoniam compoſitum ex quadratis linearum α γ, γ β, hoc eſt ε η, eſt mediale: ergo linea ε μ eſt rationalis longitudine incommenſurabilis lineæ ε ζ. Rurſus quoniã id quod fit bis ex α γ, γ ϐ, hoc eſt θ η, eſt mediale: ergo & linea θ μ eſt rationalis longitudine incõmenſurabilis lineæ ε ζ. Et quoniam compoſitum ex quadratis linearũ α γ, γ ϐ, hoc eſt ε η, eſt incommenſurabile ei quod fit bis ex α γ, γ β, hoc eſt parallelogrãmo θ η: ergo & lineæ ε μ, θ μ ſunt longitudine inter ſe incommenſurabiles. ſunt autẽ ambæ rationales, ergo lineæ ε μ, θ μ ſunt rationales potẽtia tantum commẽſurabiles. Ergo linea ε θ eſt reſiduum per 73: coniuncta uerò ei erit linea θ μ. Similiter etiam probabimus lineam ε θ eſſe reſiduum coniunctã ei uerò eſſe lineam θ ν, repetendo proceſſum huius demonſtrationis ab illis uerbis. Et quoniã cõpoſitũ ex quadratis linearũ α γ &c. ut diximus in theoremate 81. Ergo reſiduo alia atq; alia linea cõiungitur idẽ efficiẽs, quod eſt impoſſibile per 79. Nõ ergo lineæ α ϐ alia linea, quã β γ coniungi poteſt ſimilis naturæ, & quæ idem efficiat.

Definitiones

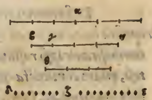
Definitiones tertiæ, ſiue termini tertij.

Propoſita linea rationali & reſiduo, ſiquidem tota, nempe compoſita ex ipſo reſiduo & linea illi cõiuncta, plus poteſt, quàm coniuncta quadrato lineæ ſibi commenſurabilis longitudine, fueritq; tota longitudine commenſurabilis lineæ propoſitæ rationali: reſiduum ipſum uocetur reſiduum primum. Si uerò coniuncta fuerit longitudine commenſurabilis rationali, ipſa autem tota plus poſsit quàm coniuncta quadrato lineæ ſibi longitudine commenſurabilis, reſiduum uocetur reſiduum ſecundũ. Si uero neutra linearum fuerit longitudine commenſurabilis rationali, poſsit autem ipſa tota plus quàm coniuncta quadrato lineæ ſibi longitudine commenſurabilis, uocetur reſiduum tertium. Rurſus ſi tota poſsit plus, quàm coniuncta quadrato lineæ ſibi longitudine incõmenſurabilis: & quidem ſi tota fuerit longitudine commenſurabilis ipſi rationali, uocetur reſiduũ quartum. Si uerò coniuncta fuerit longitudine commenſurabilis rationali, & tota plus poſsit quàm coniuncta quadrato lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis, uocetur reſiduum quintum. Si uerò neutra linearum fuerit commenſurabilis lõgitudine ipſi rationali, fueritq; tota potentior, quàm coniuncta quadrato lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis, uocetur reſiduum ſextum.

Octuageſimumquintum Theorema.

Reperire primum reſiduum.

Proponatur linea rationalis α, cui ſit longitudine commẽſurabilis linea ςη: *ergo & linea* ςη *erit rationalis. Sint*



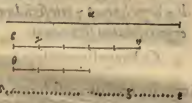
duo numeri quadrati δε, εζ tales, ut exceſſus maioris δζ, ne ſit quadratus numerus, per corollarium primi lemmatis poſt 29. Neq; ergo numerus εδ ad numerum δζ habebit proportionẽ, quã numerus quadratus ad numerũ quadratũ, per 24. 8. à deſtructione conſequẽtis. Sitq; ſicut numerus εδ ad numerum δζ, ita quadratũ lineæ βη, ad quadratũ lineæ ηγ, per lemma poſitum poſt 6. ergo quadratum lineæ βη eſt commenſurabile quadrato lineæ ηγ: ſed quadratũ lineæ βη eſt rationale, ergo & quadratũ lineæ ηγ erit rationale. ergo linea ηγ erit etiam rationalis. Et quoniam numerus εδ ad numerum δζ non habet proportionem, quam numerus quadratus ad quadratum, neq; etiam quadratũ lineæ βη habebit proportionem ad quadratum lineæ ηγ, quam numerus quadratus ad quadratũ. ergo linea βη erit longitudine incommenſurabilis lineæ ηγ per 9. Sunt autem ambæ rationales, ergo ſunt lineæ βη, ηγ rationales potentia tantum commẽſurabiles. ergo linea βγ eſt reſiduum: dico præterea eandem eſſe reſiduum primũ. Quò enim eſt maius quadratum lineæ βη quadrato lineæ ηγ (maius autem eſſe conſtat, quia quadratum lineæ βη, ad quadratum lineæ ηγ eſt, ſicut numerus εδ, maior, ad numerum δζ ex ſuppoſitione:) quò ergo quadratum lineæ βη eſt maius quadrato lineæ ηγ, ſit quadratum lineæ θ. Et quoniam eſt ſicut numerus δε ad numerum δζ, ita quadratum lineæ βη ad quadratum lineæ ηγ. per euerſam ergo proportionem ſicut numerus

δε

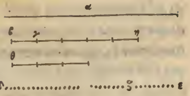
δι ad numerum ιζ,ita quadratum lineæ βη ad quadratum lineæ θ:ſed numerus δι habet proportionẽ ad numerum ζι, quam numerus quadratus ad quadratũ, quia eſt uterque quadratus, ergo & quadratum lineæ ηβ habebit proportionem ad quadratum lineæ θ, quam quadratus numerus ad quadratum.ergo linea ηβ eſt longitudine commenſurabilis lineæ θ. Poteſt *autẽ linea ηβ plus,quàm linea ηγ quadrato lineæ ſibi longitudine commenſurabilis : eſt autem tota βη longitudine commenſurabilis rationali α.ergo linea βγ eſt reſiduũ primum.*Repertum *eſt igitur reſiduum primum,quod faciendum erat.*

Octuageſimumſextum Theorema.

Reperire ſecundum reſiduum.



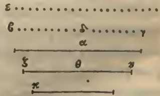
*Proponatur linea rationalis α,cui ſit cõmẽſurabilis longitudine linea ηγ: ſintq́; numeri quadrati duo δι,ιζ,quorum exceſſus δζ ne ſit quadratus:ſit etiã ſicut numerus δζ ad numerum δι,ita quadratum lineæ ηγ ad quadratum lineæ ηβ,ergo ambo quadrata ſunt cõmenſurabilia:& quia quadratum lineæ ηγ eſt rationale, etiam quadratum lineæ βη erit rationale.ergo & linea βη erit rationalis.*Et *quia quadrata linearũ βη,ηγ non habent proportionem inter ſe, quam numerus quadratus ad quadratum,ergo lineæ βη,ηγ erunt longitudine incõmenſurabiles,& ſunt ambæ rationales.ergo lineæ βη,ηγ erũt*



rationales potentia tantum cõmẽſurabiles. ergo linea ϐ γ erit reſiduũ: dico præterea eandẽ eſſe reſiduum ſecundum. quò enim eſt maius quadratum lineæ β η quadrato lineæ η γ, ſit quadratum lineæ θ. Cum igitur ſit ſicut numerus δ ε ad numerum δ ζ, ita quadratum lineæ η β ad quadratum lineæ η γ: per euerſam ergo proportionẽ ſicut δ ε ad numerum ε ζ, ita quadratũ lineæ β η ad quadratum lineæ θ. Eſt autem uterque numerus δ ε, ε ζ quadratus. ergo linea η β erit longitudine commenſurabilis lineæ θ: poteſtq; linea β η plus, quàm linea η γ quadrato lineæ ſibi longitudine commenſurabilis. & eſt linea coniuncta η γ longitudine commenſurabilis lineæ rationali α. Ergo linea β γ erit ſecũdum reſiduum. Repertum eſt ergo reſiduum ſecundum.

Octuageſimumſeptimum Theorema.

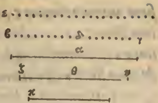
Reperire tertium reſiduum.



Proponatur linea rationalis α, & proponãtur numeri tres ε, β γ, γ δ proportionẽ non habẽtes inter ſe, quam numerus quadratus ad quadratum: & numerus β γ ad numerum β δ habeat proportionem, quam numerus quadratus ad quadratũ: ſitq; numerus β γ maior numero γ δ. fiatq; ſicut numerus ε ad β γ, ita quadratum lineæ α ad quadratum lineæ ζ η.

ſicut

ſicut autem numerus εγ ad numerum γδ,ita quadratum lineæ ζκ,ad quadratum lineæ θκ. ergo quadratum lineæ α eſt commēſurabile quadrato lineæ ζκ. Sed quadratum lineæ α eſt rationale,ergo & quadratum lineæ ζκ erit rationale. ergo linea ζκ erit rationalis: et quoniā numerus ι ad numerum εγ non habet proportionē,quā numerus quadratus ad quadratū , neq; ergo quadratum lineæ α , ad quadratū lineæ ζκ habebit proportionem,quam numerus quadratus ad quadratum. ergo linea α erit longitudine incommenſurabilis lineæ ζκ. Rurſus quoniam eſt ſicut numerus βγ ad γδ,ita quadratū lineæ ζκ ad quadratum lineæ θκ,ergo quadratum lineæ ζκ eſt commēſurabile quadrato lineæ θκ: ſed quadratū lineæ ζκ eſt rationale,ergo & quadratum lineæ θκ erit rationale. ergo linea θκ erit rationalis.Et quoniam numerus βγ ad numerum γδ non habet proportionē, quā numerus quadratus ad quadratū,neque ergo quadratum lineæ ζκ habebit proportionem ad quadratum lineæ θκ,quam quadratus numerus ad quadratum. ergo linea ζκ erit longitudine incommēſurabilis lineæ θκ: ſunt autem ambæ rationales, ergo lineæ ζκ,θκ ſunt rationales potentia tantum commenſurabiles. ergo linea ζθ erit reſiduum per 73.dico præterea eſſe reſiduū tertium.Cum enim ſit ſicut numerus ι ad numerū βγ,ita quadratum lineæ α ad quadratum lineæ ζκ:ſicut autē numerus εγ ad numerum γδ,ita quadratum lineæ ζκ, ad quadratum lineæ θκ.ergo per æquam proportionem ſicut numerus ι ad numerum γδ,ita quadratū lineæ α ad quadratum lineæ θκ:ſed numerus ι ad γδ non habet

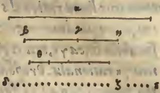


proportionem, quam numerus quadratus ad quadratum: neq; ergo quadratum lineæ α habebit proportionē ad quadratū lineæ θκ, quā quadratus numerus ad quadratum, ergo linea α erit longitudine incommēſurabilis lineæ θκ. Neutra ergo *linearum ζκ, θκ erit longitudine commenſurabilis lineæ rationali α: quo uero maius eſt quadratū lineæ ζκ quadrato lineæ θκ, maius autem eſſe conſtat, quia per ſuppoſitionem numerus βγ eſt maior numero γδ, ſit quadratum lineæ κ. Cum igitur ſit ſicut numerus βγ ad numerum γδ, ita quadratum lineæ ζκ ad quadratum lineæ θκ: per euerſam ergo proportionē ſicut numerus βγ ad βδ, ita quadratum lineæ ζκ ad quadratum lineæ κ: ſed βγ ad βδ habet proportionē, quam numerus quadratus ad quadratum. ergo quadratum lineæ ζκ habebit proportionem ad quadratū lineæ κ, quam quadratus numerus ad quadratum. ergo linea ζκ erit longitudine commenſurabilis lineæ κ.* Ergo *linea ζκ plus poteſt, quam linea θκ quadrato lineæ ſibi commenſurabilis longitudine, & neutra linearum ζκ, θκ eſt longitudine commenſurabilis lineæ rationali α, cum tamen utraque linearum ζκ, θκ ſit rationalis: ergo linea ζθ erit reſiduum tertium.* R*epertum eſt ergo tertium reſiduum.*

Octuageſimumoctauum Theorema.

Reperire quartum reſiduum.

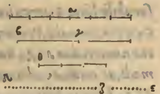
P*roponatur linea rationalis α, cui ſit longitudine commēſurabilis*



ſurabilis linea β η: ergo linea β η erit rationalis. Proponã-*tur numeri duo δ ζ, ζ ε huiuſmodi, ut totus δ ε ad neutrũ δ ζ, ζ ε habeat proportionẽ, quam numerus quadratus ad quadratũ: ſitq́; ſicut numerus δ ε ad numerum ε ζ, ita quadratum lineæ β η ad quadratum lineæ η γ: ergo quadratum lineæ β η erit cõmenſurabile quadrato lineæ η γ. ergo & quadratum lineæ η γ erit rationale, & linea η γ rationalis.* Et *quoniã numerus δ ε ad numerum ε ζ non habet proportionem, quam numerus quadratus ad quadratum, ergo linea β η erit longitudine incõmenſurabilis lineæ η γ: ſunt autem ambæ rationales. ergo linea β γ eſt reſiduum. dico præterea eſſe reſiduum quartum: quò enim quadratum lineæ β η eſt maius quadrato lineæ η γ, ſit quadratum lineæ θ. Cum igitur ſit ſicut numerus δ ε ad numerum ε ζ, ita quadratum lineæ β η ad quadratũ lineæ η γ: ergo per euerſam proportionem ſicut numerus δ ε ad numerum δ ζ, ita quadratum lineæ β η ad quadratum lineæ θ: ſed numeri δ ε, δ ζ non habent proportionem inter ſe, quàm quadratus ad quadratum: ergo linea β η erit longitudine incommenſurabilis lineæ θ.* Ergo *linea β η plus poteſt, quàm linea η γ quadrato lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis: eſtq́ue tota β η longitudine commenſurabilis lineæ rationali α. ergo linea β γ erit reſiduum quartũ. Repertum eſt igitur reſiduum quartum.*

Octuageſimumnonum Theorema.

Reperire quintum reſiduum.



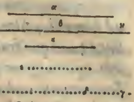
Proponatur linea rationalis α, cui ſit longitudine commenſurabilis linea γκ, erit ergo linea γκ rationalis. Proponantur numeri duo δζ, ζε tales, ut δε ad neutrum δζ, ζε habeat proportionẽ, quam numerus quadratus ad quadratũ: ſitq; ſicut numerus ζε ad numerum δε, ita quadratum lineæ γκ ad quadratũ lineæ βκ, ergo quadratum lineæ γκ erit commenſurabile quadrato lineæ βκ. ergo quadratum lineæ βκ erit rationale, & linea βκ rationalis: ſed numeri δε, εζ nõ habent proportionem, quam quadratus ad quadratũ, ergo lineæ βκ, κγ ſunt rationales potentia tantum commẽſurabiles. ergo linea βγ erit reſiduũ, dico præterea eſſe reſiduum quintum: quò enim maius eſt quadratum lineæ βκ quadrato lineæ κγ, ſit quadratũ lineæ θ. Cũ igitur ſit ſicut numerus δε ad numerum εζ, ita quadratũ lineæ βκ ad quadratũ lineæ κγ, ergo per euerſam proportionem, ſicut numerus δε ad numerum δζ, ita quadratum lineæ βκ ad quadratum lineæ θ: ſed numeri δε, εζ non habet proportionem inter ſe, quã numerus quadratus ad quadratũ, ergo linea βκ erit longitudine incommenſurabilis lineæ θ. ergo linea βκ plus poteſt linea γκ, quadrato lineæ ſibi longitudine incõmẽſurabilis: eſtque coniuncta linea γκ longitudine commenſurabilis lineæ rationali α. ergo linea βγ erit reſiduum quintum. Repertum eſt ergo reſiduum quintum.

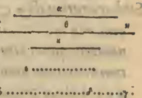
Nonageſimum Theorema.

Reperire ſextum reſiduum.

Sit

Sit linea rationalis α, & numeri tres ε, β γ, γ δ proportionem non habentes inter ſe, quã numerus quadratus ad quadratum numerum: numerus autem β γ ne habeat proportionem ad numerum β δ, quã quadratus numerus ad quadratum numerum: ſitque numerus β γ maior numero γ δ, fiatq́; ſicut numerus ε ad numerum β γ, ita quadratum lineæ α ad quadratum lineæ ζ η: ſicut autem numerus β γ ad numerum γ δ, ita quadratum lineæ ζ η ad quadratum lineæ η θ. Cum igitur ſit ſicut ε ad β γ, ita quadratum lineæ α ad quadratum lineæ ζ η, ergo quadratum lineæ α eſt commẽſurabile quadrato lineæ ζ η. ergo quadratũ lineæ ζ η erit rationale, & linea ζ η rationalis. Et quoniam numerus ε ad β γ non habet proportionem, quã quadratus numerus ad quadratũ, ergo linea α erit longitudine incõmenſurabilis lineæ ζ η. Rurſus quoniam eſt ſicut numerus β γ ad numerũ γ δ, ita quadratum lineæ ζ η ad quadratum lineæ η θ, ergo quadratum lineæ ζ η erit commenſurabile quadrato lineæ η θ: ſed quadratum lineæ ζ η eſt rationale, ergo & quadratũ lineæ η θ erit rationale. ergo linea η θ erit rationalis. Et quoniam numerus β γ ad numerum γ δ nõ habet proportionẽ, quam numerus quadratus ad quadratũ, ergo linea ζ η erit longitudine incommenſurabilis lineæ η θ: ſunt autem ambæ rationales, ergo lineæ ζ η, η θ ſunt rationales potentia tantum cõmenſurabiles. ergo linea ζ θ erit reſiduum: dico præterea eſſe reſiduum ſextum. Cũ enim ſit ſicut numerus ε ad β γ, ita quadra-



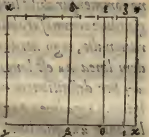


tum lineæ α, ad quadratum lineæ ζ κ: ſicut autem numerus β γ ad numerū γ δ, ita quadratum lineæ ζ κ ad quadratū lineæ κ θ. Per æquam igitur proportionē ſicut numerus ε ad numerum γ δ, ita quadratum lineæ α, ad quadratum lineæ κ θ: ſed numerus ε nō habet proportionem ad numerū γ δ, quam quadratus numerus ad quadratum. ergo linea α erit longitudine incommenſurabilis lineæ κ θ; & neutra linearum ζ κ, κ θ eſt longitudine commenſurabilis lineæ rationali α: quò igitur maius eſt quadratum lineæ ζ κ, quadrato lineæ κ θ, ſit quadratum lineæ χ. Cum igitur ſit ſicut numerus ε γ ad numerum γ δ, ita quadratum lineæ ζ κ ad quadratum lineæ κ θ. ergo per euerſam proportionem ſicut numerus ε γ ad numerum ε δ, ita quadratū lineæ ζ κ ad quadratum lineæ χ: ſed numerus ε γ ad numerum β δ non habet proportionem, quam numerus quadratus ad quadratum. ergo linea ζ κ erit longitudine incommenſurabilis lineæ χ. Ergo linea ζ κ plus poteſt quā linea κ θ quadrato lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis, & neutra linearum ζ κ, κ θ eſt longitudine commenſurabilis lineæ rationali α, ergo linea ζ θ eſt reſiduum ſextum. Repertum eſt ergo reſiduum ſextum. Eſt autem & facilior quædam ratio reperiendi cuiuſque reſidui, ex illis ſex antè dictis, hoc modo. Propoſitū ſit reperire reſiduū primum. Proponatur binomiū primum linea α γ, cuius maius nomē ſit α ε: & lineæ ε γ æqualis ſit linea β δ. ergo lineæ α β, β γ, hoc eſt lineæ α ε, β δ ſunt rationales potentia

tentia tantum commẽſurabiles. & linea α ϐ plus poteſt, quàm linea β γ, hoc eſt quàm linea β δ quadrato lineæ ſibi longitudine commenſurabilis: & linea α ϐ eſt longitudine commenſurabilis lineæ propoſitæ rationali, quia poſitum eſt lineam α γ eſſe binomiũ primum. ergo linea α δ eſt reſiduum primum. Simili ratione ſecundum, tertium, quartum, quintum & ſextum reſiduum reperire licet, ſi propoſuerimus ſingula binomia eiuſdẽ ordinis.

Nonageſimumprimum Theorema.

Si ſuperficies contineatur ex linea rationali & reſiduo primo, linea quæ illam ſuperficiem poteſt, eſt reſiduum.

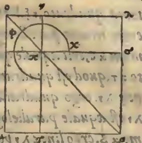


Cõtineatur ſuperficies rectãgula α β, ex linea rationali α γ, & reſiduo primo α δ. dico lineã, quæ poßit ſuperficiem illam, eſſe reſiduum. Cum enim linea α δ ſit reſiduũ primum, ſit illi coniuncta linea δ κ, (cõiunctam intellige, qualem dixi in fine theorematis 79.) ergo lineæ α κ, κ δ ſunt rationales potentia tantum commenſurabiles: & tota α κ eſt longitudine commenſurabilis rationali lineæ α γ, & linea α κ plus poteſt, quàm linea κ δ quadrato lineæ ſibi longitudine commenſurabilis. Secetur linea κ δ in partes duas æquales in puncto ι, & quadrato lineæ ι κ, æquale ſecundum lineam α κ applicetur parallelogrammum, deficiẽs figura quadrata: ſitq́; illud parallelogrammum ex α ζ, ζ κ. ergo linea α ζ eſt



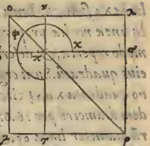
longitudine cõmenſurabilis lineæ ζκ per 18. & per puncta ε, ζ, κ ipſi lineæ αγ parallelæ ducantur εθ, ζι, κχ. Et quoniam linea αζ eſt longitudine cõmenſurabilis lineæ ζκ, ergo & tota linea ακ utriq; ex αζ, ζκ eſt longitudine commenſurabilis per 16. ſed linea ακ eſt longitudine commẽſurabilis linea αγ. ergo utraque linearum αζ, ζκ eſt longitudine commẽſurabilis lineæ αγ: ſed linea αγ eſt rationalis, ergo utraque αζ, ζκ eſt etiam rationalis: quare & utrunque parallelogrammum αι, ζχ eſt rationale per 20. Et quoniam linea δε eſt longitudine commenſurabilis lineæ εκ, ergo & linea δκ eſt longitudine commẽſurabilis utrique δε, εκ: ſed linea δκ eſt rationalis, ergo utraque δε, εκ eſt rationalis: ſed eadem linea δκ eſt longitudine incommenſurabilis lineæ αγ per definitionem reſidui primi uel per 13 aut 14 huius. Quia linea δκ eſt longitudine incommenſurabilis lineæ ακ, quæ linea ακ eſt longitudine commenſurabilis eidem lineæ αγ. ergo utraque linea δε, εκ eſt rationalis & longitudine incommẽſurabilis lineæ αγ. Ergo utrunque parallelogrammum δθ, εχ eſt mediale per 22. Sit parallelogrammo αι æquale quadratum λμ: parallelogrammo uero ζχ ſit æquale quadratum νξ, detractum ex quadrato λμ, habens cum illo communem angulum λομ. Quod ut fiat reperiatur media proportionalis inter lineas ζι, ζκ: nam quadratum mediæ proportionalis erit æquale parallelogrammo ex ζι, ζκ: porro de

linea



linea λ ο ſumatur linea æqualis lineæ mediæ proportionali modo repertæ, & deſcribatur eius quadratũ. Sunt ergo ambo quadrata λ μ, ν ξ circa eandem diametrũ per 26.6: ſit eorũ diameter linea ο ρ, & deſcribatur figura qualis hic uidetur. Cum igitur ſit parallelogrammũ ex α ζ, ζ κ æquale quadrato lineæ ι κ. eſt igitur ſicut linea α ζ ad lineam ι κ, ita linea ι κ ad lineam ζ κ per 17.6: ſed ſicut linea α ζ ad lineam ι κ, ita parallelogrammum α ι ad parallelogrammum ι κ: ſicut autem linea ι κ ad lineam ζ κ, ita parallelogrammum ι κ ad parallelogrammum ζ κ. Ergo *parallelogrammorum α ι, ζ κ parallelogrammum ι κ eſt mediũ proportionale: ſed & quadratorũ λ μ, ν ξ parallelogrammum μ ν, eſt medium proportionale per lemma poſitum poſt 53.* Eſt *autem parallelogrammo α ι æquale quadratum λ μ: parallelogrãmo uero ζ κ eſt æquale quadratum ν ξ. ergo parallelogrãmum μ ν eſt æquale parallelogrammo ι κ per lemma poſitum à nobis ante 54.* Sed *parallelogrammum ι κ eſt æquale parallelogrammo δ θ per* 1.6: *parallelogrammũ uero μ ν eſt æquale parallelogrãmo λ ξ per* 43.1. Ergo *parallelogrammum δ κ eſt æquale gnomoni υ φ χ, qui gnomo conſtat ex illis parallelogrãmis. per quæ uides in figura maiorem ſemicirculo portionem pertranſire, & præterea quadrato ν ξ.* Eſt *autem & parallelogrammũ α κ æquale quadratis λ μ, ν ξ: & modo concluſum eſt parallelogrammũ δ κ eſſe æquale gnomoni υ φ χ, & præ-*

terea quadrato, ν ξ. Reliquum ergo, nempe parallelogrammum α ϛ, erit æquale quadrato σ τ, quod eſt quadratum lineæ λ ν. ergo quadratũ lineæ λ ν eſt æquale parallelogrammo α β. ergo linea λ ν poteſt illud parallelogrammum α β: dico præterea lineam λ ν eſſe reſiduum. Cum enim utrunque parallelogrammũ κ ι, ζ χ ſit rationale, ut ſupra dictum, ergo & illis æqualia quadrata λ μ, ν ξ, hoc eſt, quadrata linearum λ ο, ο ν erunt rationalia, & lineæ ipſæ λ ο, ο ν, rationales. Rurſus quoniam parallelogrammum λ θ, hoc eſt, λ ξ eſt mediale, ergo parallelogrammum λ ξ erit incommenſurabile quadrato ν ξ. ergo per 1.6 & 10. huius, linea λ ο erit longitudine incommẽſurabilis lineæ ο ν: ſunt autem ambæ rationales, ſunt ergo rationales potentia tantum cõmenſurabiles. ergo linea λ ν eſt reſiduum: poteſt autẽ parallelogrammum α ϛ. ergo ſi ſuperficies cõtineatur &c. linea quæ illam ſuperficiem poteſt, eſt reſiduum.



Nonageſimumſecundum Theorema.

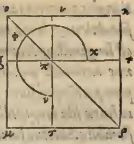
Si ſuperficies contineatur ex linea rationali, & reſiduo ſecundo, linea quæ illam ſuperficiem poteſt, eſt reſiduum mediale primum.

Superficies α β contineatur ex linea rationali α γ, & reſiduo ſecundo α δ. dico lineam quæ poteſt ſuperficiem α β eſſe eam, quæ dicitur reſiduũ mediale primum. Sit enim lineæ α δ linea coniuncta δ κ. ergo lineæ α κ, κ δ ſunt rationales

tionales potentia tantum cõmenſurabiles: & linea coniuncta δκ, eſt longitudine commẽſurabilis lineæ rationali αγ: linea uerò ακ plus poteſt quã linea δκ quadrato lineæ ſibi longitudine commenſurabilis. Secetur linea δκ bifariã & æqualiter in pũcto ε, & ſecũ-



dum lineã ακ applicetur quartæ parti quadrati lineæ δκ, hoc eſt, quadrato lineæ εκ æquale parallelogrammũ ex αζ, ζκ, deficiens ſpecie quadrata. ergo per 18 linea αζ eſt longitudine commẽſurabilis lineæ ζκ: & per puncta ε, ζ, κ ipſi lineæ αγ ducantur parallelæ εθ, ζι, κκ: & quoniam linea αζ eſt longitudine commẽſurabilis lineæ ζκ, ergo tota linea ακ eſt utrique αζ, ζκ longitudine cõmenſurabilis. Eſt autem linea ακ rationalis & longitudine incommenſurabilis lineæ αγ. ergo & utraque αζ, ζκ eſt rationalis & longitudine incommenſurabilis lineæ αγ. ergo utrunque parallelogrammum αι, ζκ eſt mediale per 22. Rurſus cum linea δε ſit commenſurabilis longitudine lineæ εκ, ergo & δκ eſt utrique δε, εκ longitudine commenſurabilis: ſed linea δκ eſt longitudine commẽſurabilis lineæ rationali αγ, ergo utraque δε, εκ eſt rationalis & longitudine commenſurabilis lineæ αγ. ergo utrunque parallelogrammum δθ, εκ eſt rationale per 20. Deſcribatur parallelogrammo αι æquale quadratũ λμ: parallelogrammo uero ζκ, æquale ſit quadratũ νξ, ſicut in præcedenti theoremate, quadrata λμ, νξ erunt circa eandem diametrum: ſit diameter ορ, & deſcriba-



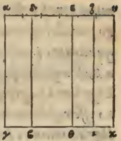
tur figura ſicut modo dictũ eſt. Quoniam ergo parallelogramma α ι, ζ κ ſunt medialia & inter ſe commenſurabilia, & illis æqualia quadrata linearũ λ ο, ο ν ſunt medialia, ergo lineæ λ ο, ο ν ſunt mediales potentia commenſurabiles. Conſtat autem potentia commenſurabiles eſſe lineas λ ο, ο ν, quia earum quadrata ſunt commẽſurabilia: commẽſurabilia ſunt porro quadrata illa, ſcilicet linearum λ ο, ο ν, quia ſunt æqualia parallelogrammis, α ι, ζ κ, quæ ſunt cõmenſurabilia: cõmẽſurabilia porro eſſe illa parallelogrãma α ι, ζ κ conſtat eo, quod modo probatum eſt, lineas α ζ, ζ η eſſe longitudine commenſurabiles. Ergo per 1.6 & 10 *huius parallelogrãma α ι, ζ κ ſunt commenſurabilia. ergo modo probatum eſt uia reſolutionis lineas λ ο, ο ν, eſſe potentia cõmenſurabiles.* Et *quoniam parallelogrammum ex α ζ, ζ η eſt æquale quadrato lineæ ε η. eſt ergo ſicut linea α ζ ad lineã ε η, ita linea ε η ad lineam ζ η: ſed ſicut linea α ζ ad lineam ε η, ita parallelogrammũ α ι ad parallelogrammũ ε κ: ſicut autem linea ε η ad lineam ζ η, ita parallelogrammũ ε κ ad parallelogrammum ζ κ. ergo parallelogrammorum α ι, ζ κ medium proportionale eſt parallelogrammũ ε κ.* E*ſt etiam quadratorum λ μ, ν ξ medium proportionale parallelogrammum μ ν: & eſt æquale parallelogrammũ α ι quadrato λ μ: parallelogrammum uero ζ κ eſt æquale quadrato ν ξ.* Er*go μ ν erit æquale parallelogrãmo ε κ: ſed ε κ eſt æquale parallelogrammo δ θ: parallelogrammum*

mum uero λ ξ eſt æquale parallelogrammo μ ν. Totũ ergo parallelogrammum λ κ eſt æquale gnomoni υ φ χ, & quadrato ν ξ. reliquum ergo, nempe parallelogrammũ α β, eſt æquale quadrato σ τ, hoc eſt quadrato lineæ λ ν. Ergo linea λ ν poteſt ſuperficiem α β: dico præterea lineã λ ν eſſe reſiduum mediale primum. Cum enim parallelogrammum ι κ ſit rationale, ſitq́; æquale parallelogrãmo μ ν, hoc eſt λ ξ: ergo λ ξ, hoc eſt parallelogrammum ex λ ο, ο ν erit rationale: ſed quadratum ν ξ eſt mediale, quia ei æquale parallelogrammum ζ κ modo probatũ eſt eſſe mediale. Ergo parallelogrammum λ ξ erit incommenſurabile quadrato ν ξ: ſed ſicut parallelogrammũ λ ξ ad quadratum ν ξ, ita linea λ ο, ad lineam ο ν, per 1 6. ergo per 10 huius, lineæ λ ο, ο ν ſunt longitudine incommenſurabiles: ſed modo probatum eſt eas eſſe mediales potentia commenſurabiles. ergo lineæ λ ο, ο ν ſunt mediales potentia tantum commenſurabiles, continentes rationale. Ergo linea λ ν eſt reſiduum mediale primum, & poteſt ſuperficiem α β contentam ex linea rationali & reſiduo ſecundo.

Nonageſimumtertium Theorema.

Si ſuperficies contineatur ex linea rationali & reſiduo tertio, linea quæ illam ſuperficiem poteſt, eſt reſiduum mediale ſecundum.

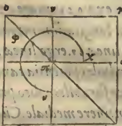
Superficies enim α β cõtineatur ex linea rationali α γ, & reſiduo tertio α δ. dico lineam quæ poßit ſuperficiem α β eſſe reſiduum mediale ſecũdum. Sit linea coniuncta δ κ, ergo lineæ α κ, κ δ ſunt rationales potentia tantum com-

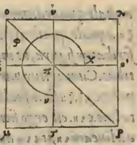


mēſurabiles, & neutra linearum α η, η δ eſt longitudine commenſurabilis lineæ rationali α γ. Tota *uero α β plus poteſt, quàm coniuncta η δ quadrato lineæ ſibi longitudine commenſurabilis. reliqua fiāt, ut in precedētibus: ergo lineæ α ζ, ζ η ſunt longitudine commēſurabiles & parallelogrammū α ι, commenſurabile parallelogrammo ζ κ.* Et *quoniam α ζ, ζ η ſunt longitudine cõmenſurabiles, ergo tota linea α η eſt utrique α ζ, ζ η longitudine commēſurabilis: ſed lineæ α η eſt rationalis & longitudine incommenſurabilis lineæ α γ, ergo utraque α ζ, ζ η. eſt rationalis & longitudine incommēſurabilis lineæ α γ. ergo utrūque parallelogrammum α ι, ζ κ eſt mediale per* 22. R*urſus cum linea δ ε ſit longitudine commenſurabilis lineæ ε η, ergo & tota δ η eſt longitudine cõmenſurabilis utrique δ ε, ε η: ſed linea δ η eſt rationalis potentia tantum commenſurabilis lineæ α γ, ergo & utraque linearum δ ε, ε η eſt rationalis potentia tantum commenſurabilis lineæ. α γ. ergo & utrūque parallelogrammum δ θ, ε κ eſt mediale: & quoniam lineæ α η, δ η ſunt potentia tantum commenſurabiles, ergo ſunt longitudine incommenſurabiles: ſed linea α η eſt longitudine commenſurabilis lineæ α ζ: linea autem δ η eſt longitudine commenſurabilis lineæ η ε, ergo linea α ζ eſt longitudine incommenſurabilis lineæ ε η.* Sicut *autem linea α ζ ad lineam ε η, ita parallelogrammum α ι ad parallelogrammum ε κ. ergo α ι eſt incommenſurabile ipſi ε κ.* Conſtruatur *parallelogrammo α ι*

æquale

æquale quadratum λ μ: ipſi vero ζ κ æquale quadratũ ν ξ, & deſcribatur figura, ut in præcedentibus. Cum igitur parallelogrãmũ ex α ζ, ζ κ ſit æquale quadrato lineæ ι κ. eſt ergo ſicut linea α ζ ad lineam ι κ, ita ι κ ad ζ κ: ſed ſicut linea α ζ ad lineam κ ι, ita parallelogrammũ α ι ad parallelogrammum ι κ: ſicut autem linea ι κ ad lineam ζ κ, ita parallelogrammum ι κ ad parallelogrammũ ζ κ: ſicut ergo parallelogrammum α ι ad parallelogrammũ ι κ, ita ι κ ad ζ κ. ergo parallelogrammorum α ι, ζ κ medium proportionale eſt ι κ. Sed quadratorũ λ μ, ν ξ medium proportionale eſt parallelogrammum μ ν, ergo ι κ eſt æquale ipſi μ ν. ergo totum parallelogrammum α κ eſt æquale gnomoni υ φ χ, & quadrato ν ξ. Eſt autem ipſum α κ æquale quadratis λ μ, ν ξ, reliquum ergo nempe α ς eſt æquale quadrato σ τ, hoc eſt quadrato lineæ λ ν, ergo λ ν poteſt ſuperficiem α ς: dico præterea lineam λ ν eſſe reſiduum mediale ſecundum. Cum enim, ſicut probatũ eſt, parallelogramma α ι, ζ κ ſint medialia, ergo eis æqualia quadrata linearũ λ ο, ο ν ſunt etiã medialia. ergo utraq; linea λ ο, ο ν erit medialis: & quoniam parallelogrammum α ι eſt commenſurabile parallelogrammo ζ κ, ergo & eis æqualia quadrata linearum λ ο, ο ν erunt commenſurabilia. Rurſus cum ſit probatum parallelogrammum α ι eſſe incommẽſurabile parallelogrammo ι κ, ergo incommenſurabile erit quadratum λ μ, parallelogrammo μ ν, hoc eſt, quadratum lineæ λ ο, parallelogrã-

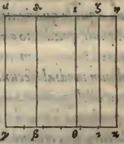




mo ex λο,ο ι: quare & linea λα erit longitudine incõmenſurabilis lineæ ο ι. ergo lineæ λο,ο ι ſunt mediales potentia tantum commenſurabiles: dico præterea eas continere mediale. Cũ enim probatũ ſit ι κ eſſe mediale, ergo & illi æquale parallelogrammũ ex λο,ο ι erit mediale. ergo linea λ ι eſt reſiduum mediale ſecundum, & poteſt ſuperficiem α β. Ergo linea potens ſuperficiem α ϛ eſt reſiduum mediale ſecundum.

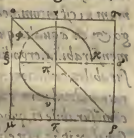
Nonageſimumquartum Theorema.

Si ſuperficies contineatur ex linea rationali & reſiduo quarto, linea quę illam ſuperficiē poteſt, eſt linea minor.

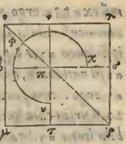


Superficies α β continεatur ex linea rationali α γ, et reſiduo quarto α δ. dico lineam quæ illam ſuperficiem α ϛ poteſt, eſſe eã, quæ dicitur linea minor: ſit enim linea cõiuncta δ κ, ergo lineæ α κ, δ κ ſunt rationales potentia tantum commẽſurabiles: & linea α κ plus poteſt, quàm linea δ κ quadrato lineæ ſibi longitudine incommẽſurabilis, & linea α κ eſt longitudine commenſurabilis lineæ α γ. Diuidatur linea δ κ bifariam & æqualiter in puncto ι: & quadrato lineæ ι κ æquale ſecũdum lineam α κ applicetur parallelogrãmum, deficiẽs figura quadrata, ſitq́; illud parallelogrãmum

mũ ex αζ,ζκ. ergo per 19. linea αζ erit longitudine incommenſurabilis lineæ ζκ. Ducantur per puncta ι,ζ,κ ipſis lineis αγ,δβ, parallelæ ιθ,ζι,κκ. Cum igitur linea ακ ſit rationalis, & longitudine commenſurabilis lineæ αγ, ergo totum parallelogrammum ακ eſt rationale per 20. Rurſus cum linea δκ ſit longitudine incommẽſurabilis lineæ αγ, (nam ſi eſſet linea δκ longitudine commenſurabilis lineæ αγ, cum linea ακ ſit eidem αγ longitudine commẽſurabilis, eſſent etiam lineæ ακ, δκ longitudine commenſurabiles, cum tamen poſitæ ſint potẽtia tantum commenſurabiles) ſunt autem ambæ αγ, δκ rationales. ergo parallelogrammũ δκ eſt mediale. Rurſus cum linea αζ ſit longitudine incõmenſurabilis lineæ ζκ, ergo incommenſurabile eſt αι ipſi parallelogrammo ζκ. Cõſtruatur parallelogrammo αι æquale quadratum λμ: ipſi uero ζκ æquale quadratum νξ, ambo quadrata habentia communem angulũ λον. ergo quadrata λμ, νξ ſunt circa eandem diametrũ: ſit diameter ορ & deſcribatur figura.



Cum igitur parallelogrammũ ex αζ,ζκ ſit æquale quadrato lineæ εκ, erit proportionaliter, ſicut linea αζ ad lineam εκ, ita linea εκ ad lineã ζκ: ſed ſicut linea αζ ad lineam εκ, ita parallelogrammum αι ad parallelogrammum εκ per 1.6. Sicut autem linea εκ ad lineã ζκ, ita parallelogrammum εκ ad parallelogrammum ζκ. ergo parallelogrammorũ αι, ζκ medium proportionale eſt εκ. ergo, ſicut dictum eſt in præcedentibus, parallelo-



grammum μ ν eſt æquale parallelogrammo ε κ: ſed δ θ eſt æquale ipſi ε κ, ipſum autem μ ν ipſi λ ξ. ergo parallelogrammum δ κ eſt æquale gnomoni υ φ χ, & quadrato ν ξ. ergo reliquum α β eſt æquale reliquo quadrato σ τ, hoc eſt, quadrato lineæ λ ν: dico præterea lineā λ ν eſſe irrationalem eam, quæ linea minor uocatur. Cum enim parallelogrammum α κ ſit rationale, & ſit æquale quadratis linearum λ ο, ο ν, ergo compoſitum ex quadratis linearū λ ο, ο ν erit rationale. Rurſus cum δ κ ſit mediale, ſitq; æquale ei, quod fit bis ex λ ο, ο ν, ergo id quod fit bis ex λ ο, ο ν eſt etiam mediale: & quoniam parallelogrammum α ι eſt incommenſurabile parallelogrammo ζ κ, ergo & eis æqualia quadrata linearum λ ο, ο ν ſunt incōmenſurabilia. ergo lineæ λ ο, ο ν ſunt potentia incommēſurabiles, conficientes compoſitum ex quadratis ipſarū rationale: id uero quod fit bis ex ipſis mediale, quod eſt cōmēſurabile ei, quod fit ſemel ex ipſis: ergo & quod fit ſemel ex ipſis, erit etiā mediale. Ergo linea λ ν eſt irrationalis, quæ uocatur linea minor & poteſt ſuperficiē α β.

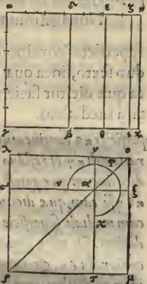
Nonageſimumquintum Theorema.

Si ſuperficies contineatur ex linea rationali, & reſiduo quinto, linea quæ illam ſuperficiē poteſt, eſt ea, quę dicitur cum rationali ſuperficie faciens totam medialem.

Superficies enim α β contineatur ex linea rationali α γ, &

reſiduo

reſiduo quinto α δ.dico lineam,quæ illam ſuperficiẽ poteſt,eam eſſe quæ dicitur faciens cum rationali ſuperficie totam medialem:ſit enim lineæ α δ iuncta linea δ κ, quæ erit longitudine cõmenſurabilis lineæ rationali α γ, cætera erunt ut in præcedenti.Et quoniam linea α κ eſt longitudine incommenſurabilis lineæ α γ,& ſunt ambæ rationales, ergo parallelogrãmũ α κ erit mediale.Rurſus quoniã linea δ κ eſt rationalis, & lõgitudine cõmẽſurabilis lineæ α γ, ergo δ κ erit rationale. Cõſtruatur quadratum λ μ æquale parallelogrammo α ι, quadratum uero ν ξ æquale ipſi ζ κ,ut in proximo,ſimiliter demõſtrabimus lineam λ ν poſſe ſuperficiem α β: dico præterea eam eſſe lineam, quæ dicitur cum rationali ſuperficie faciens totam medialẽ:



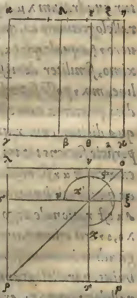
cum enim α κ ſit mediale, etiam illis æquale compoſitum ex quadratis linearum λ ο, ο ν,erit mediale.Rurſus quia δ κ eſt rationale,ergo & illi æquale id, quod fit bis ex λ ο, ο ν erit etiam rationale, & quoniam linea α ζ eſt longitudine incommẽſurabilis lineæ ζ κ, ergo per 1. 6 & 10 huius. parallelogrammum α ι erit incõmenſurabile parallelogrammo ζ κ,ergo & quadratũ lineæ λ ο erit incommenſurabile quadrato lineæ ο ν: ergo lineæ λ ο, ο ν ſunt potentia incommenſurabiles facientes compoſitum

ex quadratis ipſarũ mediale, id uero quod fit bis ex ipſis rationale. ergo reliqua linea λ γ eſt irrationalis: nẽpe ea quæ dicitur cum rationali ſuperficie faciens totã medialem, & poteſt ſuperficiem α β. Ergo linea potens ſuperficiem α β eſt linea, quæ dicitur cum rationali ſuperficie faciens totam medialem.

Nonageſimumſextum Theorema.

Si ſuperficies contineatur ex linea rationali & reſiduo ſexto, linea quæ illam ſuperficiem poteſt, eſt ea quæ dicitur faciens cum mediali ſuperficie totam medialem.

Superficies α β contineatur ex linea rationali α γ, et reſiduo ſexto α δ. dico lineam quæ poteſt ſuperficiẽ α β eſſe eam, quæ dicitur faciens cum mediali ſuperficie totã medialem. Sit enim lineæ α δ linea coniuncta δ η, & cætera fiãt, ut in præcedẽtibus: cum linea α ζ ſit longitudine incõmenſurabilis lineæ ζ η, ergo & parallelogrammum α ι erit incommenſurabile parallelogrammo ζ κ. Et quoniã lineæ α η, α γ, ſunt rationales potentia tantum commẽſurabiles, ergo parallelogrammum α κ erit mediale: ſimili ratione δ κ erit mediale. Cum igitur lineæ α η, η δ ſint potentia tantum commenſurabiles, ergo

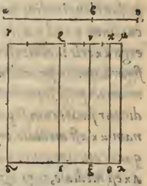


go ſunt longitudine inter ſe incommenſurabiles: ſed ſicut linea α κ ad κ λ, ita parallelogrammum α κ ad λ κ. ergo α κ erit incõmenſurabile ipſi λ κ. Conſtruatur eadẽ figura, quæ in præcedentibus, ſimiliter probabimus lineam λ ν poſſe ſuperficiẽ α ϵ: dico præterea eam eſſe, quæ dicitur faciẽs cum ſuperficie mediali totam medialem: nam α κ eſt mediale, ergo & illi æquale compoſitũ ex quadratis linearum λ ο, ο ν erit mediale. Rurſus quoniã λ κ eſt mediale, ergo & ei æquale, id quod fit bis ex λ ο, ο ν erit mediale. Et quoniam α κ eſt incommenſurabile ipſi λ κ, ergo & quadrata linearum λ ο, ο ν erunt incõmenſurabilia ei, quod fit bis ex λ ο, ο ν: & cum parallelogrammum α ι ſit incommenſurabile parallelogrammo ζ κ, ergo etiam quadratum lineæ λ ο erit incommenſurabile quadrato lineæ ο ν. ergo lineæ λ ο, ο ν erunt potentia incommenſurabiles, faciẽtes compoſitũ ex quadratis linearum λ ο, ο ν mediale, & quod fit bis ex ipſis mediale: præterea compoſitum ex quadratis ipſarũ incommenſurabile ei, quod fit bis ex ipſis. ergo linea λ ν eſt irrationalis, quæ dicitur cum mediali ſuperficie faciens totam medialẽ, & poteſt ſuperficiem α ϵ. Ergo linea potens ſuperficiem α ϐ eſt ea, quæ dicitur faciens cum ſuperficie mediali totam medialem.

Nonageſimumſeptimum Theorema.

Quadratum reſidui ſecundum lineam rationalem applicatum, facit alterum latus reſiduum primũ.

Sit reſiduum α ϵ, rationalis uero linea γ λ: & quadrato lineæ α ϐ æquale ſecundum lineam γ λ applicetur paral-



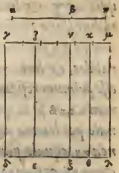
lelogrammum γε faciẽs alterũ latus γζ, dico lineam γζ eſſe reſiduum primum. Sit enim lineæ αβ linea cõueniẽter iuncta βκ, quæ & eadem dicitur linea cõiuncta, ut in fine theorematis 79. ergo lineæ ακ, κβ, ſunt rationales potentia tantum commenſurabiles: & quadrato lineæ ακ ſecundum lineam γδ applicetur parallelogrammum γθ, quadrato uero lineæ βκ æquale parallelogrãmum κλ: totum ergo γλ eſt æquale quadratis linearum ακ, κβ: ſed parallelogrammum γε eſt æquale quadrato lineæ αβ, reliquum ergo ζλ eſt æquale ei, quod fit bis ex ακ, κβ: quia quadrata linearum ακ, κβ ſunt æqualia ei, quod fit bis ex ακ, κβ, & quadrato lineæ αβ per 72. Secetur linea ζμ bifariam & æqualiter in puncto ν, & à pũcto ν ducatur lineæ γδ parallela linea νξ, ergo utrũque ex parallelogrãmis ζξ, νλ eſt æquale ei, quod fit ſemel ex ακ, κβ. Et quoniam quadrata linearum ακ, κβ ſunt rationalia, quibus quadratis æquale eſt parallelogrammũ γλ, ergo γλ eſt rationale. ergo linea γμ eſt rationalis longitudine commenſurabilis lineæ γδ. Rurſus quoniam id quod fit bis ex ακ, κβ eſt mediale, ergo & illi æquale nempe parallelogrammum ζλ, erit mediale. ergo linea ζμ eſt rationalis longitudine incommenſurabilis lineæ γδ. Et quoniam quadrata linearum ακ, κβ ſunt rationalia, id uero quod fit bis ex ακ, κβ mediale, ergo quadrata linearum ακ, κβ ſunt incommenſurabilia

bilia

bilia ei, quod ſit bis ex α η, η ϛ. Eſt autẽ quadratis linearũ α η, η ϛ æquale parallelogrammum γ λ: ei uero quod ſit bis ex α η, η ϛ æquale ζ λ, ergo γ λ erit incommenſurabile ipſi ζ λ. ergo & linea γ μ erit incommenſurabilis longitudine lineæ ζ μ: ſunt autem ambæ rationales. ergo lineæ γ μ, ζ μ ſunt rationales potentia tantum commenſurabiles, & linea γ ζ eſt reſiduum per 73: dico prætereà eſſe primum reſiduum. Cum enim quadratorum linearum α η, η β ſit id quod ſit ex α η, η β medium proportionale per lemma poſitum poſt 53: ſit autem quadrato lineæ α η, æquale parallelogrammum γ θ, ei uerò quod ſit ex α η, η ϛ æquale ν λ: quadrato uero lineæ η β æquale κ λ. ergo inter parallelogramma γ θ, κ λ medium proportionale eſt ν λ. ergo ſicut γ θ ad ν λ, ita ν λ ad κ λ. Sed ſicut γ θ ad ν λ, ita linea γ κ ad lineam ν μ: ſicut autem ν λ ad κ λ, ita linea ν μ ad lineam κ μ. ſicut ergo linea γ κ ad lineam ν μ, ita linea ν μ ad lineam κ μ. ergo parallelogrammum ex γ κ, κ μ eſt æquale quadrato ν μ, hoc eſt quartæ parti quadrati lineæ ζ μ. Et quoniam quadratum lineæ α η eſt commenſurabile quadrato lineæ η β, ergo & γ θ erit cõmenſurabile ipſi κ λ: ſicut autem γ θ ad κ λ, ita linea γ κ ad lineam κ μ. ergo linea γ κ erit longitudine commenſurabilis lineæ κ μ. ergo per 18. linea γ μ plus poteſt, quàm linea ζ μ quadrato lineæ ſibi longitudine commenſurabilis. Eſt autem linea γ μ longitudine commenſurabilis lineæ rationali γ δ, ergo linea γ ζ eſt reſiduum primum. Ergo quadratum reſidui ſecundum lineam rationalem applicatum facit alterum latus reſiduum primum.

Nonageſimumoctauum Theorema.

Quadratum reſidui medialis primi ſecundum rationalem applicatum, facit alterum latus reſiduũ ſecundum.



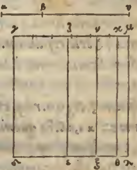
Sit reſiduum mediale primum αβ, rationalis uero γδ: et quadrato lineæ αϛ æquale ſecundum lineam γδ applicetur parallelogrammum γι, faciens alterum latus γζ. dico lineam γζ eſſe reſiduum ſecũdum. Sit enim lineæ αϛ linea conuenienter iuncta βη, ergo lineæ αη, βη ſunt mediales potentia tantum commenſurabiles rationale continentes. Et quadrato lineæ αη æquale ſecundum lineam γδ applicetur γθ faciens alterum latus γκ: quadrato uero lineæ ηβ æquale applicetur κλ faciens alterum latus κμ. totũ ergo γλ eſt æquale ambobus quadratis linearum αη, ηϛ, quæ ſunt medialia inter ſe commenſurabilia. ergo & parallelogramma γθ, κλ ſunt medialia inter ſe commenſurabilia. ergo per 16. totum γλ eſt utrique γθ, κλ commenſurabile: ergo per corollarium 24 totum γλ eſt etiam mediale. ergo linea γμ eſt rationalis longitudine incommenſurabilis lineæ γδ per 23. Et quoniam γλ eſt æquale quadratis linearũ αη, ηϛ, quadrata uero linearum αη, ηβ ſunt æqualia ei, quod fit bis ex αη, ηϛ, et quadrato lineæ αϛ per 7.2. quadrato uero lineæ αβ eſt æquale parallelogrammum γι: reliquum ergo nempe id quod fit bis ex αη, ηϛ eſt æquale reſiduo parallelogrãmo ζλ: ſed id quod fit bis ex αη, ηβ eſt rationale, ergo ζλ erit rationale, ergo linea ζμ eſt ratio-

rationalis & longitudine cõmenſurabilis lineæ γ δ per 21. Cum igitur parallelogrammum γ λ ſit mediale, parallelogrammum uero ζ λ ſit rationale, ergo ſunt incõmẽſurabilia: ergo & linea γ μ erit longitudine incommẽſurabilis lineæ ζ μ: & ſunt ambæ rationales. ergo linea γ ζ erit reſiduum. dico prætereà eſſe reſiduũ ſecundum. Secetur enim linea ζ μ bifariam & æqualiter in puncto ν: à quo puncto parallelà ad lineam γ δ ducatur linea ν ξ. ergo utrũq; ex ζ ξ, ν λ eſt æquale parallelogrãmo ex α κ, κ β. Et quoniam quadratorum linearum α κ, κ β medium proportionale eſt id quod fit ex α κ, κ β, ergo & parallelogrammorum γ θ, κ λ medium proportionale eſt ν λ. Sed ſicut γ θ eſt ad ν λ, ita linea γ κ ad lineam ν μ: ſicut autem ν λ ad κ λ, ita linea ν μ ad lineã κ μ. ſicut ergo linea γ κ ad lineam ν μ, ita linea ν μ ad lineam κ μ. ergo parallelogrammum ex γ κ, κ μ eſt æquale quadrato lineæ ν μ, hoc eſt, quartæ parti quadrati lineæ ζ μ. Sed parallelogrammum γ θ eſt commẽſurabile ipſi κ λ, ergo & linea γ κ lineæ κ μ erit commenſurabilis longitudine. ergo per 18. linea γ μ plus poteſt, quàm linea ζ μ quadrato lineæ ſibi longitudine commenſurabilis: eſt autem linea ζ μ, quæ dicitur cõuenienter iuncta cõmenſurabilis longitudine lineæ rationali γ δ, ergo linea γ ζ eſt reſiduũ ſecundum. Ergo quadratum reſidui medialis primi &c.

Nonageſimumnonum Theorema.

Quadratum reſidui medialis ſecundi ſecundum rationalem applicatum, facit alterum latus reſiduum tertium.

Sit linea αϐ reſiduum mediale ſecũdum, rationalis uero ſit linea γδ: & quadrato lineæ αϐ æquale ſecundum lineã γδ applicetur parallelogrammum γε faciens alterum latus γζ: dico lineam γζ eſſe reſiduum tertium. Sit enim lineæ αϐ linea conuenienter iuncta ϐν, ergo lineæ αν, νϐ ſunt mediales potentia tantum commenſurabiles continentes mediale & cætera, ut in proximo theoremate. ergo linea γμ eſt rationalis lõgitudine incommenſurabilis lineæ rationali γδ: & utrũque ex ζξ, ιλ eſt æquale ei, quod fit ex αν, νϐ: ſed id quod fit ex αν, νϐ eſt mediale, ergo id quod fit bis ex αν, νϐ eſt etiam mediale: ergo & totum ζλ eſt etiam mediale. Ergo *linea ζμ eſt rationalis & lõgitudine incommenſurabilis lineæ γδ.* Et *quoniam lineæ αν, νϐ ſunt longitudine incommenſurabiles, ergo & quadratum lineæ αν erit incommenſurabile parallelogrammo ex αν, νϐ: ſed quadrato lineæ αν ſunt commenſurabilia quadrata linearum αν, νϐ: parallelogrammo uero ex αν, νϐ eſt commenſurabile id, quod fit bis ex αν, νϐ: ergo quadrata linearum αν, νϐ ſunt incommenſurabilia ei, quod fit bis ex αν, νϐ. ergo & eis æqualia parallelogramma γλ, ζλ ſunt incommenſurabilia: ergo & linea γμ erit longitudine incommẽſurabilis lineæ ζμ, & ſunt ambæ rationales. ergo linea γζ eſt reſiduum: dico præterea eſſe reſiduum tertium. Cum enim ſit commenſurabile quadratũ lineæ αν, hoc eſt γδ, quadrato lineæ*

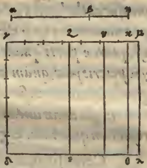


 ϐν,

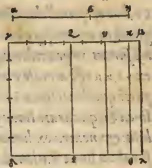
ϐ κ, hoc eſt parallelogrãmo κ λ. ergo & linea γ κ erit longitudine commẽſurabilis lineæ κ μ. Eadem ratione qua uſi ſumus in præcedenti, probabitur parallelogrammũ ex γ κ, κ μ eſſe æquale quadrato lineæ ν μ, hoc eſt quartæ parti quadrati lineæ ζ μ. Ergo linea γ μ poterit plus, quã linea ζ μ quadrato lineæ ſibi longitudine commenſurabilis: & neutra ex lineis γ μ, ζ μ eſt longitudine commenſurabilis lineæ rationali γ δ. ergo linea γ ζ eſt reſiduum tertium. Ergo quadratũ reſidui medialis ſecundi &c.

Centeſimum Theorema.

Quadratum lineæ minoris ſecundum rationalem applicatum, facit alterum latus reſiduũ quartum.



Sit linea minor α ϐ, rationalis uero γ δ: ſecundum quam quadrato lineæ α ϐ æquale applicetur parallelogrammum γ ε, faciens alterum latus γ ζ: dico lineam γ ζ eſſe reſiduum quartum. Sit enim lineæ α ϐ linea conuenienter iuncta ϐ κ, ergo lineæ α κ, ϐ κ ſunt potentia incommẽſurabiles, facientes compoſitũ ex quadratis ipſarũ rationale: id uero quod fit ex ipſis, mediale, & cætera ſint ut in præcedentibus: ergo totum parallelogrammum γ λ erit rationale. ergo & linea γ μ erit rationalis longitudine commenſurabilis lineæ γ δ. Et quoniam id quod fit bis ex α κ, κ ϐ eſt mediale, ergo & illi æquale parallelogrammũ ζ λ erit mediale. ergo linea ζ μ erit rationalis lõgitudine incõmen-

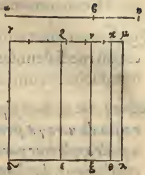


ſurabilis lineæ γ δ: ſed linea γ μ eſt longitudine commenſurabilis lineæ γ δ. ergo per 13. uel 14. huius linea γ μ erit longitudine incōmenſurabilis lineæ ζ μ. ſed ſunt ambæ rationales, ergo lineæ γ μ, ζ μ ſunt rationales potentia tantū cōmenſurabiles. ergo linea γ ζ erit reſiduum. dico præterea eſſe reſiduum quartum. Cū enim lineæ κ κ, κ ε. ſint potentia incommenſurabiles, ergo & ipſarum quadrata, hoc eſt, illis æqualia parallelogramma γ θ, κ λ ſunt incōmenſurabilia. ergo & linea γ κ erit longitudine incommenſurabilis lineæ κ μ. Similiter oſtendemus parallelogrammum ex γ κ, κ μ eſſe æquale quadrato lineæ ν μ, hoc eſt, quartæ parti quadrati lineæ ζ μ. ergo per 19. linea γ μ poterit plus, quàm linea ζ μ quadrato lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis: & eſt tota γ μ longitudine commenſurabilis lineæ rationali γ δ, ergo linea γ ζ erit reſiduum quartum. Ergo quadratū lineæ minoris &c.

Centeſimumprimum Theorema.

Quadratum lineæ cum rationali ſuperficie facientis totam medialem ſecundum rationalem applicatum, facit alterum latus reſiduum quintum.

Sit linea cum rationali ſuperficie faciens totam medialem α β: rationalis uerò γ δ, ſecundum quam quadrato lineæ α β æquale applicetur parallelogrammum γ ε faciēs alterum latus γ ζ. dico lineam γ ζ eſſe reſiduum quintū. Sit enim

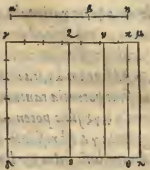


enim lineæ α β, linea conuenienter iuncta β κ. ergo lineæ α κ, β κ ſunt potentia incõmenſurabiles facientes compoſitum ex quadratis ipſarum mediale: id uero quod fit ex ipſis rationale. fiant enim omnia eo modo quo in præcedẽtibus, ergo totum γ λ erit mediale. ergo linea γ μ erit rationalis longitudine incommenſurabilis lineæ γ δ: & utrũque ex parallelogrammis ζ ξ, ν λ erit rationale, ergo & totum ζ λ erit etiam rationale. ergo & linea ζ μ erit rationalis longitudine cõmenſurabilis lineæ γ δ. Et quoniam γ λ eſt mediale, parallelogrammum uero ζ λ rationale, ergo γ λ, ζ λ ſunt incommenſurabilia: & linea γ μ erit longitudine incommenſurabilis lineæ ζ μ: & ſunt ambæ rationales, ergo lineæ γ μ, ζ μ ſunt rationales potentia tantum commenſurabiles. ergo linea γ ζ eſt reſiduum. dico præterea eſſe reſiduum quintum: ſimiliter enim probabimus parallelogrãmũ ex γ κ, κ μ eſſe æquale quadrato lineæ ν μ, hoc eſt, quartæ parti quadrati lineæ ζ μ. Et quoniã quadratũ lineæ α κ, hoc eſt, parallelogrammũ γ θ eſt incõmenſurabile quadrato β κ, hoc eſt, parallelogrãmo κ λ, ergo linea γ κ erit longitudine incommenſurabilis lineæ κ μ. ergo per 19 linea γ μ plus poteſt, quàm linea ζ μ quadrato lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis: & eſt conuenienter iuncta linea ζ μ longitudine commenſurabilis lineæ γ δ. ergo linea γ ζ eſt reſiduum quintum. Ergo quadratum &c.

Centeſimumſecundum Theorema.

Quadratum lineæ cum mediali ſuperficie facientis totam medialem, ſecundum rationalem applicatum, facit alterum latus reſiduum ſextum.

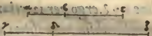
Sit linea cum mediali ſuperficie faciẽs totum mediale α ϲ, rationalis uero γ ᴧ, ſecundum quam quadrato lineæ α ϐ æquale applicetur parallelogrammum γ ε, faciens alterum latus γ ζ. dico lineam γ ζ eſſe reſiduum ſextum. Sit enim lineæ α ϐ linea conuenienter iuncta ϐ ᴎ, ergo lineæ α ᴎ, ϐ ᴎ ſunt potentia incommenſurabiles, facientes compoſitum ex quadratis ipſarum mediale, id uero quod fit ex ipſis mediale: præterea incommenſurabile compoſitũ ex quadratis ipſarum ei, quod fit ex ipſis. fiant cætera ut in præcedentibus. ergo totum γ λ erit mediale (quia eſt æquale compoſito ex quadratis linearũ α ᴎ, ᴎ ϲ, quod eſt mediale.) ergo linea γ μ erit rationalis longitudine incommenſurabilis lineæ γ ᴧ: ſimiliter parallelogrammum ζ λ erit mediale. ergo & linea ζ μ erit rationalis longitudine incommenſurabilis lineæ γ ᴧ. Et quoniam compoſitum ex quadratis linearum α ᴎ, ϐ ᴎ eſt incommẽſurabile ei, quod fit bis ex α ᴎ, ᴎ ϲ, ergo illis æqualia γ λ, ζ λ erunt incõmenſurabilia. ergo & lineæ γ μ, ζ μ erũt longitudine incommenſurabiles: ſunt autem ambæ rationales, ergo ſunt rationales potentia tantum commenſurabiles. Ergo linea γ ζ erit reſiduũ: dico præterea eſſe reſiduum ſextũ. fiãt cætera ut in ſuperioribus. Et quoniam lineæ α ᴎ, ϲ ᴎ ſunt potentia incommenſurabiles, ergo quadrata ipſarum ſunt incommenſurabilia, hoc eſt, illis



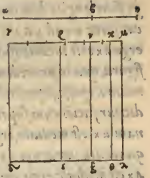
*illis æqualia γθ,κλ.ergo & linea γκ lineæ κμ erit longitudine incommenſurabilis,ſicut in ſuperioribus demonſtrabatur parallelogrammorum γθ,κλ eſſe medium proportionale νλ.ergo per 19.linea γμ plus poterit,quàm linea μζ quadrato lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis:& neutra ex ipſis γμ,ζμ eſt longitudine cõmẽſurabilis lineæ rationali γδ.ergo linea γζ eſt reſiduum ſextum.*Ergo quadratum *&c.*

Centeſimumtertium Theorema.

Linea reſiduo commenſurabilis longitudine,eſt & ipſa reſiduum eiuſdem ordinis.



Sit reſiduum αβ,cui ſit linea commenſurabilis longitudine γδ.dico lineam γδ eſſe & ipſam reſiduum & ordinis eiuſdem,cuius & reſiduum αβ.Cũ enim linea αε ſit reſiduũ,ſit linea ei conuenienter iuncta ει:ergo lineæ αι,βι ſunt rationales potentia tantùm commenſurabiles:ſitq́; ſicut linea αβ ad lineam γδ,ita linea βι ad lineã δζ:ergo ſicut unum ad unum,ita omnia ad omnia per 12.5.Erit ergo ſicut linea αβ ad lineam γδ,ita tota linea αι,ad totam lineam γζ,& linea βι ad lineam δζ. ergo per.10 huius,linea αι erit commenſurabilis longitudine lineæ γζ,& linea βι lineæ δζ:ſed linea αι eſt rationalis,ergo & linea γζ erit rationalis.ſimiliter &



lelogrammum γι faciēs alterū latus γζ, dico lineam γζ eſſe reſiduum primum. Sit enim lineæ αβ linea cōueniēter iuncta βη, quæ & eadem dicitur linea cō iuncta, ut in fine theorematis 79. ergo lineæ αη, ηβ, ſunt rationales potentia tantum commenſurabiles: & quadrato lineæ αη ſecundum lineam γδ applicetur parallelogrammum γθ, quadrato uero lineæ βη æquale parallelogrāmum κλ: totum ergo γλ eſt æquale quadratis linearum αη, ηβ: ſed parallelogrammum γι eſt æquale quadrato lineæ αβ, reliquum ergo ζλ eſt æquale ei, quod fit bis ex αη, ηβ: quia quadrata linearum αη, ηβ ſunt æqualia ei, quod fit bis ex αη, ηβ, & quadrato lineæ αβ per 7.2. Secetur linea ζμ bifariam & æqualiter in puncto ν, & à pūcto ν ducatur lineæ γδ parallela linea νξ, ergo utrūque ex parallelogrāmis ζξ, νλ eſt æquale ei, quod fit ſemel ex αη, ηβ. Et quoniam quadrata linearum αη, ηβ ſunt rationalia, quibus quadratis æquale eſt parallelogrammū γλ, ergo γλ eſt rationale. ergo linea γμ eſt rationalis longitudine commenſurabilis lineæ γδ. Rurſus quoniam id quod fit bis ex αη, ηβ eſt mediale, ergo & illi æquale nempe parallelogrammum ζλ, erit mediale. ergo linea ζμ eſt rationalis longitudine incommenſurabilis lineæ γδ. Et quoniam quadrata linearum αη, ηβ ſunt rationalia, id uero quod fit bis ex αη, ηβ mediale, ergo quadrata linearum αη, ηβ ſunt incommenſura-

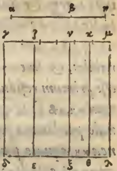
bilia

bilia ei, quod ſit bis ex α κ, κ β. Eſt autẽ quadratis linearũ α κ, κ β æquale parallelogrammum γ λ: ei uero quod ſit bis ex α κ, κ β æquale ζ λ, ergo γ λ erit incommenſurabile ipſi ζ λ. ergo & linea γ μ erit incommenſurabilis longitudine lineæ ζ μ: ſunt autem ambæ rationales. ergo lineæ γ μ, ζ μ ſunt rationales potentia tantum commenſurabiles, & linea γ ζ eſt reſiduum per 73: dico præterea eſſe primum reſiduum. Cum enim quadratorum linearum α κ, κ β ſit id quod ſit ex α κ, κ β medium proportionale per lemma poſitum poſt 53: ſit autem quadrato lineæ α κ, æquale parallelogrammum γ θ, ei uero quod ſit ex α κ, κ β æquale ν λ: quadrato uero lineæ κ β æquale κ λ. ergo inter parallelogramma γ θ, κ λ medium proportionale eſt ν λ. ergo ſicut γ θ ad ν λ, ita ν λ ad κ λ. Sed ſicut γ θ ad ν λ, ita linea γ κ ad lineam ν μ: ſicut autem ν λ ad κ λ, ita linea ν μ ad lineam κ μ. ſicut ergo linea γ κ ad lineam ν μ, ita linea ν μ ad lineam κ μ. ergo parallelogrammum ex γ κ, κ μ eſt æquale quadrato ν μ, hoc eſt quartæ parti quadrati lineæ ζ μ. Et quoniam quadratum lineæ α κ eſt commenſurabile quadrato lineæ κ β, ergo & γ θ erit cõmenſurabile ipſi κ λ: ſicut autem γ θ ad κ λ, ita linea γ κ ad lineam κ μ. ergo linea γ κ erit longitudine commenſurabilis lineæ κ μ. ergo per 18 linea γ μ plus poteſt, quàm linea ζ μ quadrato lineæ ſibi longitudine commenſurabilis. Eſt autem linea γ μ longitudine commenſurabilis lineæ rationali γ δ, ergo linea γ ζ eſt reſiduum primum. Ergo quadratum reſidui ſecundum lineam rationalem applicatum facit alterum latus reſiduum primum.

Nonageſimumoctauum Theorema.

Quadratum reſidui medialis primi ſecundum rationalem applicatum, facit alterum latus reſiduũ ſecundum.

Sit reſiduum mediale primum α β, rationalis uero γ δ: et quadrato lineæ α ϛ æquale ſecundum lineam γ δ applicetur parallelogrammum γ ι, faciens alterum latus γ ζ. dico lineam γ ζ eſſe reſiduum ſecũdum. Sit enim lineæ α ϛ linea conuenienter iuncta β η, ergo lineæ α η, β η ſunt mediales potentia tantum commenſurabiles



rationale continentes. Et quadrato lineæ α η æquale ſecundum lineam γ δ applicetur γ θ faciens alterum latus γ κ: quadrato uero lineæ η β æquale applicetur κ λ faciens alterum latus κ μ. totũ ergo γ λ eſt æquale ambobus quadratis linearum α η, η ϛ, quæ ſunt medialia inter ſe commenſurabilia. ergo & parallelogramma γ θ, κ λ ſunt medialia inter ſe commenſurabilia. ergo per 16. totum γ λ eſt utrique γ θ, κ λ commenſurabile: ergo per corollarium 24 totum γ λ eſt etiam mediale. ergo linea γ μ eſt rationalis longitudine incommenſurabilis lineæ γ δ per 23. Et quoniam γ λ eſt æquale quadratis linearũ α η, η ϛ, quadrata uero linearum α η, η β ſunt æqualia ei, quod fit bis ex α η, η ϛ, et quadrato lineæ α ϛ per 7.2. quadrato uero lineæ α β eſt æquale parallelogrammum γ ι: reliquum ergo nempe id quod fit bis ex α η, η ϛ eſt æquale reſiduo parallelogrãmo ζ λ: ſed id quod fit bis ex α η, η β eſt rationale, ergo ζ λ erit rationale, ergo linea ζ μ eſt

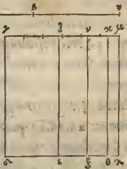
ratio-

rationalis & longitudine cõmenſurabilis lineæ γ λ per 21. Cum igitur parallelogrammum γ λ ſit mediale, parallelogrammum uero ζ λ ſit rationale, ergo ſunt incõmẽſurabilia: ergo & linea γ μ erit longitudine incommẽſurabilis lineæ ζ μ: & ſunt ambæ rationales. ergo linea γ ζ erit reſiduum. dico præterea eſſe reſiduũ ſecundum. Secetur enim linea ζ μ biſariam & æqualiter in puncto ν: à quo puncto parallela ad lineam γ λ ducatur linea ν ξ. ergo utrũq; ex ζ ξ, ν λ eſt æquale parallelogrãmo ex α κ, κ ϐ. Et quoniam quadratorum linearum α κ, κ ϐ medium proportionale eſt id quod ſit ex α κ, κ ϐ, ergo & parallelogrammorum γ θ, κ λ medium proportionale eſt ν λ: Sed ſicut γ θ eſt ad ν λ, ita linea γ κ ad lineam ν μ: ſicut autem ν λ ad κ λ, ita linea ν μ ad lineã κ μ. ſicut ergo linea γ κ ad lineam ν μ, ita linea ν μ ad lineam κ μ. ergo parallelogrammum ex γ κ, κ μ eſt æquale quadrato lineæ ν μ, hoc eſt, quartæ parti quadrati lineæ ζ μ. Sed parallelogrammum γ θ eſt commẽſurabile ipſi κ λ, ergo & linea γ κ lineæ κ μ erit commenſurabilis longitudine. ergo per 18. linea γ μ plus poteſt, quàm linea ζ μ quadrato lineæ ſibi longitudine commenſurabilis: eſt autem linea ζ μ, quæ dicitur cõuenienter iuncta cõmenſurabilis longitudine lineæ rationali γ λ, ergo linea γ ζ eſt reſiduũ ſecundum. Ergo *quadratum reſidui medialis primi &c.*

Nonageſimumnonum Theorema.

Quadratum reſidui medialis ſecundi ſecundum rationalem applicatum, facit alterum latus reſiduum tertium.

Sit linea αϐ reſiduum mediale ſecũdum, rationalis uero ſit linea γδ: & quadrato lineæ αβ æquale ſecundum lineã γδ applicetur parallelogrammum γι faciens alterum latus γζ: dico lineam γζ eſſe reſiduum tertium. Sit enim lineæ αβ linea conuenienter iuncta βκ, ergo lineæ ακ, κβ ſunt mediales potentia tantum commenſurabiles continentes mediale & cætera, ut in proximo theoremate. ergo linea γμ eſt rationalis lõgitudine incommenſurabilis lineæ rationali γδ: & utrũque ex ζξ, νλ eſt æquale ei, quod fit ex ακ, κϐ: ſed id quod fit ex ακ, κβ eſt mediale, ergo id quod fit bis ex ακ, κϐ eſt etiam mediale: ergo & totum ζλ eſt etiam mediale. Ergo linea ζμ eſt rationalis & lõgitudine incommenſurabilis lineæ γδ. Et quoniam lineæ ακ, κβ ſunt longitudine incommenſurabiles, ergo & quadratum lineæ ακ erit incommenſurabile parallelogrammo ex ακ, κβ: ſed quadrato lineæ ακ ſunt commenſurabilia quadrata linearum ακ, κβ: parallelogrammo uero ex ακ, κϐ eſt commenſurabile id, quod fit bis ex ακ, κϐ: ergo quadrata linearum ακ, κβ ſunt incommenſurabilia ei, quod fit bis ex ακ, κϐ. ergo & eis æqualia parallelogramma γλ, ζλ ſunt incommenſurabilia: ergo & linea γμ erit longitudine incommẽſurabilis lineæ ζμ, & ſunt ambæ rationales. ergo linea γζ eſt reſiduum: dico præterea eſſe reſiduum tertium. Cum enim ſit commenſurabile quadratũ lineæ ακ, hoc eſt γθ, quadrato lineæ

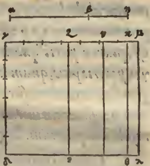


βκ,

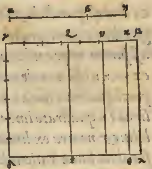
β κ, hoc eſt parallelogrãmo κ λ. ergo & linea γ κ erit longitudine commẽſurabilis lineæ κ μ. Eadem ratione qua uſi ſumus in præcedenti, probabitur parallelogrammũ ex γ κ, κ μ eſſe æquale quadrato lineæ ν μ, hoc eſt quartæ parti quadrati lineæ ζ μ. Ergo linea γ μ poterit plus, quã linea ζ μ quadrato lineæ ſibi longitudine commenſurabilis: & neutra ex lineis γ μ, ζ μ eſt longitudine commenſurabilis lineæ rationali γ δ. ergo linea γ ζ eſt reſiduum tertium. Ergo quadratũ reſidui medialis ſecundi &c.

Centeſimum Theorema.

Quadratum lineæ minoris ſecundum rationalem applicatum, facit alterum latus reſiduũ quartum.



Sit linea minor α β, rationalis uero γ δ: ſecundum quam quadrato lineæ α β æquale applicetur parallelogrammum γ ε, faciens alterum latus γ ζ: dico lineam γ ζ eſſe reſiduum quartum. Sit enim lineæ α β linea conuenienter iuncta β κ, ergo lineæ α κ, β κ ſunt potentia incommẽſurabiles, facientes compoſitũ ex quadratis ipſarũ rationale: id uero quod fit ex ipſis, mediale, & cætera ſint ut in præcedentibus: ergo totum parallelogrammum γ λ erit rationale. ergo & linea γ μ erit rationalis longitudine commenſurabilis lineæ γ δ. Et quoniam id quod fit bis ex α κ, κ β eſt mediale, ergo & illi æquale parallelogrammũ ζ λ erit mediale. ergo linea ζ μ erit rationalis lõgitudine incõmen-



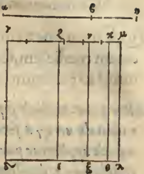
ſurabilis lineæ γ δ: ſed linea γ μ eſt longitudine commenſurabilis lineæ γ δ. ergo per 13. uel 14. huius linea γ μ erit longitudine incōmenſurabilis lineæ ζ μ. ſed ſunt ambæ rationales, ergo lineæ γ μ, ζ μ ſunt rationales potentia tantū cōmenſurabiles. ergo linea γ ζ erit reſiduum. dico præterea eſſe reſiduum quartum. Cū enim lineæ κ ν, ν ε. ſint potentia incommenſurabiles, ergo & ipſarum quadrata, hoc eſt, illis æqualia parallelogramma γ θ, κ λ ſunt incōmenſurabilia. ergo & linea γ κ erit longitudine incommenſurabilis lineæ κ μ. Similiter oſtendemus parallelogrammum ex γ κ, κ μ eſſe æquale quadrato lineæ ν μ, hoc eſt, quartæ parti quadrati lineæ ζ μ. ergo per 19. lineæ γ μ poterit plus, quàm linea ζ μ quadrato lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis: & eſt tota γ μ longitudine commenſurabilis lineæ rationali γ δ, ergo linea γ ζ erit reſiduum quartum. Ergo *quadratū lineæ minoris &c.*

Centeſimumprimum Theorema.

Quadratum lineæ cum rationali ſuperficie facientis totam medialem ſecundum rationalem applicatum, facit alterum latus reſiduum quintum.

Sit linea cum rationali ſuperficie faciens totam medialem α β: rationalis uero γ δ, ſecundum quam quadrato lineæ α β æquale applicetur parallelogrammum γ ε faciēs alterum latus γ ζ. dico lineam γ ζ eſſe reſiduum quintū. Sit

enim



enim lineæ α β, linea conuenienter iuncta β κ. ergo lineæ α κ, β κ ſunt potentia incõmenſurabiles facientes compoſitum ex quadratis ipſarum mediale: id uero quod fit ex ipſis rationale. fiant enim omnia eo modo quo in præcedẽtibus, ergo totum γ λ erit mediale. ergo linea γ μ erit rationalis longitudine incommenſurabilis lineæ γ δ: & utrũque ex parallelogrammis ζ ξ, ν λ erit rationale, ergo & totum ζ λ erit etiam rationale. ergo & linea ζ μ erit rationalis longitudine cõmenſurabilis lineæ γ δ. Et quoniam γ λ eſt mediale, parallelogrammum uero ζ λ rationale, ergo γ λ, ζ λ ſunt incommenſurabilia: & linea γ μ erit longitudine incommenſurabilis lineæ ζ μ: & ſunt ambæ rationales, ergo lineæ γ μ, ζ μ ſunt rationales potentia tantum commenſurabiles. ergo linea γ ζ eſt reſiduum. dico præterea eſſe reſiduum quintum: ſimiliter enim probabimus parallelogrãmũ ex γ κ, κ μ eſſe æquale quadrato lineæ ν μ, hoc eſt, quartæ parti quadrati lineæ ζ μ. Et quoniã quadratũ lineæ α κ, hoc eſt, parallelogrammũ γ θ eſt incõmenſurabile quadrato β κ, hoc eſt, parallelogrãmo κ λ, ergo linea γ κ erit longitudine incommenſurabilis lineæ κ μ. ergo per 19 linea γ μ plus poteſt, quàm linea ζ μ quadrato lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis: & eſt conuenienter iuncta linea ζ μ longitudine commenſurabilis lineæ γ δ. ergo linea γ ζ eſt reſiduum quintum. Ergo quadratum *&c.*

Centeſimumſecundum Theorema.

Quadratum lineæ cum mediali ſuperficie facientis totam medialem, ſecundum rationalem applicatum, facit alterum latus reſiduum ſextum.

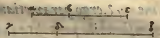
Sit linea cum mediali ſuperficie faciēs totum medialę α ϐ, rationalis uero γ λ, ſecundum quam quadrato lineæ α ϐ æquale applicetur parallelogrammum γ ι, faciens alterum latus γ ζ. dico lineam γ ζ eſſe reſiduum ſextum. Sit enim lineæ α ϐ linea conuenienter iuncta ϐ ν, ergo lineæ α ν, ϐ ν ſunt potentia incommenſurabiles, facientes compoſitum ex quadratis ipſarum mediale, id uero quod fit ex ipſis mediale: præterea incommenſurabile compoſitū ex quadratis ipſarum ei, quod fit ex ipſis. fiant cætera ut in præcedentibus. ergo totum γ λ erit mediale (quia eſt æquale compoſito ex quadratis linearū α ν, ν ϐ, quod eſt mediale.) ergo linea γ μ erit rationalis longitudine incommenſurabilis lineæ γ λ: ſimiliter parallelogrammum ζ λ erit mediale. ergo & linea ζ μ erit rationalis longitudine incommenſurabilis lineæ γ λ. Et quoniam compoſitum ex quadratis linearum α ν, ϐ ν eſt incommēſurabile ei, quod fit bis ex α ν, ν ϐ, ergo illis æqualia γ λ, ζ λ erunt incōmenſurabilia. ergo & lineæ γ μ, ζ μ erūt longitudine incommenſurabiles: ſunt autem ambæ rationales, ergo ſunt rationales potentia tantum commenſurabiles. Ergo linea γ ζ erit reſiduū: dico præterea eſſe reſiduum ſextū. fiāt cætera ut in ſuperioribus. Et quoniam lineæ α ν, ϐ ν ſunt potentia incommenſurabiles, ergo quadrata ipſarum ſunt incommenſurabilia, hoc eſt, illis



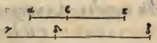
illis æqualia γθ, κλ. ergo & linea γκ lineæ κμ erit longitudine incommenſurabilis, ſicut in ſuperioribus demonſtrabatur parallelogrammorum γθ, κλ eſſe medium proportionale νλ. ergo per 19. linea γμ plus poterit, quàm linea μζ quadrato lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis: & neutra ex ipſis γμ, ζμ eſt longitudine commẽſurabilis lineæ rationali γδ. ergo linea γζ eſt reſiduum ſextum. Ergo *quadratum &c.*

Centeſimumtertium Theorema.

Linea reſiduo commenſurabilis longitudine, eſt & ipſa reſiduum eiuſdem ordinis.



Sit reſiduum αβ, cui ſit linea commenſurabilis longitudine γδ. dico lineam γδ eſſe & ipſam reſiduum & ordinis eiuſdem, cuius & reſiduum αβ. Cũ *enim linea αβ ſit reſiduũ, ſit linea ei conuenienter iuncta βε: ergo lineæ αε, βε ſunt rationales potentia tantum commenſurabiles: ſitq; ſicut linea αβ ad lineàm γδ, ita linea βε ad lineã δζ: ergo ſicut unum ad unum, ita omnia ad omnia per* 12.5. *Erit ergo ſicut linea αβ ad lineam γδ, ita tota linea αε, ad totam lineam γζ, & linea βε ad lineam δζ. ergo per.* 10 *huius, linea αε erit commenſurabilis longitudine lineæ γζ, & linea βε lineæ δζ: ſed linea αε eſt rationalis, ergo & linea γζ erit rationalis. ſimiliter &*



linea δζ erit rationalis,quia linea βε cui ipſa eſt commenſurabilis eſt etiam rationalis:ſed quoniam eſt ſicut linea βε ad lineam αε,ita linea δζ ad lineā γζ,& lineæ βε, αε ſunt potentia tantum commenſurabiles,ergo & lineæ δζ,γζ ſunt potentia tantum commenſurabiles.ergo linea γδ eſt reſiduū. dico præterea eſſe reſiduū eiuſdem ordinis cuius & linea αβ. Cum enim ſit ut modo diximus ſicut linea αε, ad lineam γζ ita linea βε ad lineā δζ.ergo permutata proportione ſicut αε ad βε,ita γζ ad δζ:linea autem αε poteſt plus quàm linea εβ,aut quadrato lineæ ſibi longitudine commenſurabilis,aut quadrato lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis.ſi quadrato lineæ ſibi longitudine commenſurabilis, ergo & linea γζ poteſt plus quàm linea δζ quadrato lineæ ſibi longitudine commenſurabilis per 15.Et quidem ſi linea αε eſt longitudine commenſurabilis lineæ propoſitæ rationali,cum linea αε ſit longitudine commenſurabilis lineæ γζ.ergo per 12.etiam linea γζ erit longitudine cō menſurabilis propoſitæ rationali.ergo utraque linea αβ γδ erit reſiduum primū.Quòd ſi linea βε eſt longitudine commenſurabilis lineæ propoſitæ rationali,cū linea βε ſit longitudine commenſurabilis lineæ δζ,ergo linea δζ erit etiam longitudine cōmenſurabilis propoſitæ rationali:& tunc utraque linea αβ,γδ erit reſiduum ſecundū.Quòd ſi neutra ex lineis αε,βε erit longitudine commenſurabilis propoſitæ rationali,neutra etiā ex lineis γζ,δζ erit propoſitæ rationali longitudine commen ſurabilis per 13,uel 14 huius:& tunc utraque linea αβ,

γδ

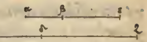
γ δ erit reſiduum tertium. Quòd ſi linea α ε plus poteſt quàm linea β ε quadrato lineæ ſibi longitudine incommẽſurabilis, ſimiliter & linea γ ζ plus poterit quàm linea δ ζ quadrato lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis per 15: & quidem ſi linea α ε erit longitudine commenſurabilis lineæ rationali, ſimiliter & linea γ ζ erit eidem commenſurabilis. & ſic erit utraq; α β, γ δ reſiduum quartũ: ſi uero linea β ε erit commenſurabilis longitudine rationali, ſimiliter & linea δ ζ, & ſic erit utraque α β, γ δ reſiduum quintum. ſi uero neutra ex lineis α ε, β ε erit longitudine commenſurabilis rationali, ſimiliter neutra ex lineis γ ζ, δ ζ erit eidem commenſurabilis: & ſic erit utraque α β, γ δ reſiduum ſextum. Ergo linea γ δ erit reſiduũ eiuſdẽ ordinis cuius & α β.

Centeſimumquartum Theorema.

Linea commenſurabilis reſiduo mediali, eſt & ipſa reſiduum mediale & eiuſdem ordinis.



Sit reſiduum mediale α β, cui ſit commenſurabilis longitudine & potentia, ſiue potentia tantum linea γ δ. dico γ δ eſſe reſiduum mediale & eiuſdẽ ordinis. Cum enim α β ſit reſiduum mediale, ſit ei conuenienter iuncta β ε, ergo lineæ α ε, β ε ſunt mediales potentia tantum commenſurabiles. Sit autẽ ſicut α β ad γ δ, ita β ε ad δ ζ. ſimili ratione qua in præcedẽti uſi ſumus, linea α ε erit longitudine & potentia, ſiue potentia tantum commenſurabilis lineæ γ ζ, & linea β ε lineæ δ ζ. ergo per 24 linea γ ζ erit medialis: & linea δ ζ erit medialis, quia eſt cõmen-



ſurabilis lineæ mediali βι. ſimiliter lineæ γζ, δζ erunt potentia tantum commenſurabiles: quia habent eandem proportionem inter ſe, quam lineæ αι, βι, quæ ſunt inter ſe commenſurabiles potentia tantum. ergo linea γδ eſt reſiduum mediale. dico præterea eſſe eiuſdem ordinis cuius & αβ. Cum enim ſit, ſicut linea αι ad lineam βι, ita linea γζ ad lineam δζ: ſed ſicut linea αι ad lineam βι, ita quadratum lineæ αι ad parallelogrammum ex αι, βι per 1.6: ſicut autem linea γζ ad lineam δζ, ita quadratum lineæ γζ ad parallelogrammum ex γζ, δζ. ergo ſicut quadratum lineæ αι ad parallelogrammū ex αι, βι, ita quadratum lineæ γζ ad parallelogrammum ex γζ, δζ. permutata ergo proportione ſicut quadratum lineæ αι ad quadratum lineæ γζ, ita parallelogrammum ex αι, βι ad parallelogrammū ex γζ, δζ. Sed quadratum lineæ αι eſt cōmēſurabile quadrato lineæ γζ (quia linea αι eſt commenſurabilis lineæ γζ.) ergo & parallelogrammum ex αι, βι erit commenſurabile parallelogrammo ex γζ, δζ. ergo ſi parallelogrammū ex αι, βι eſt rationale, etiam parallelogrammū ex γζ, δζ erit rationale: & tunc utraque linea αβ, γδ erit reſiduū mediale primum. Si uero parallelogrammum ex αι, βι erit mediale, etiam parallelogrammū ex γζ, δζ erit mediale per corollarium 24: et tunc utraque linea αβ, γδ erit reſiduum mediale ſecundum. ergo linea γδ erit reſiduū mediale eiuſdem ordinis. Hoc theorema cōceptū eſt uniuerſaliter, ſiue linea ſit cōmēſurabilis longitudine & potentia, ſiue potentia tantum reſiduo mediali, eſſe & ipſam

ipſam reſiduum mediale, & eiuſdem ordinis. Idem *dicendum de tribus proximis theorematibus.*

Centeſimumquintum Theorema.

Linea commenſurabilis lineæ minori, eſt & ipſa linea minor.

Sit linea minor α β, cui ſit commenſurabilis γ δ. dico lineã γ δ eſſe lineam minorem: fiãt



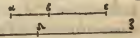
enim eadem quæ in præcedentibus. quoniam lineæ α ε, β ε ſunt potentia incommenſurabiles, ergo & lineæ γ ζ, δ ζ ſunt potentia incommẽſurabiles per 22. 6. & 10 *huius.* R*urſus per 22.6 ſicut quadratum lineæ α ε ad quadratum lineæ β ε, ita quadratum lineæ γ ζ ad quadratũ lineæ δ ζ. cõiunctã ergo proportione, ſicut quadrata linearum α ε, β ε ad quadratum lineæ β ε, ita quadrata linearum γ ζ, δ ζ ad quadratum lineæ δ ζ: & permutata proportione ſicut quadrata linearũ α ε, β ε ad quadrata linearum γ ζ, δ ζ, ita quadratum lineæ β ε ad quadratum lineæ δ ζ. ſed quadratum lineæ β ε eſt commenſurabile quadrato lineæ δ ζ (quia lineæ β ε, δ ζ ſunt cõmenſurabiles.) ergo & compoſitũ ex quadratis linearum α ε, β ε erit commenſurabile compoſito ex quadratis linearum γ ζ, δ ζ: ſed compoſitũ ex quadratis linearũ α ε, β ε eſt rationale, ergo & compoſitum ex quadratis linearum γ ζ, δ ζ erit rationale.* R*urſus cũ ſit ſicut quadratum lineæ α ε ad parallelogrammum ex α ε, β ε, ita quadratum lineæ γ ζ ad parallelogrammum ex γ ζ, δ ζ. (ſicut diximus in proximo theoremate) permutata er-*



go proportione ſicut quadratũ lineæ αε ad quadracũ lineæ γζ, ita parallelogrãmum ex αε, βε ad parallelogrãmũ ex γζ, δζ. ſed quadratũ lineæ αε eſt cõmenſurabile quadrato lineæ γζ, quia lineæ αε, γζ ſunt cõmenſurabiles, ergo & parallelogrãmũ ex αε, βε erit commenſurabile parallelogrammo ex γζ, δζ. ſed parallelogrammũ ex αε, βε eſt mediale, ergo & parallelogrammum ex γζ, δζ erit mediale. ergo lineæ γζ, δζ erunt potentia incommenſurabiles facientes compoſitum ex quadratis ipſarum rationale, parallelogrãmũ uero ex ipſis mediale. Ergo linea *γδ erit linea minor.*

Centeſimumſextum Theorema.

Linea commenſurabilis lineæ cum rationali ſuperficie facienti totam medialem, eſt & ipſa linea cũ rationali ſuperficie faciens totam medialem.



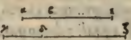
Sit linea cum rationali ſuperficie faciens totam medialem αβ, cui ſit commẽſurabilis linea γδ. dico lineã γδ eſſe cũ rationali ſuperficie faciẽtẽ totam medialem. Sit lineæ αβ linea conuenienter iuncta βε, ergo lineæ αε, βε ſunt potentia incommenſurabiles facientes compoſitum ex quadratis ipſarum mediale, parallelogrammũ uero ex ipſis rationale: fiant omnia quæ in præcedẽtibus. Similiter quoque demonſtrabimus ſicut linea αε ad lineam βε, ita lineam γζ ad lineam δζ: & compoſitũ ex quadratis linearum αε, βε eſſe commenſurabile compoſito ex quadratis linearum γζ, δζ: id uero quod ſit ex αε, βε eſſe

eſſe ſimiliter commenſurabile ei, quod ſit ex γ ζ, δ ζ. quare & ſimiliter lineæ γ ζ, δ ζ erunt potentia incommenſurabiles facientes ea quæ lineæ α ι, β ι. Ergo linea γ δ erit etiam linea cū rationali ſuperficie faciens totā medialē.

Centeſimumſeptimum Theorema.

Linea commenſurabilis lineæ cum mediali ſuperficie facienti totam medialem, commenſurabilis eſt & ipſa cum mediali ſuperficie faciens totam medialem.

Sit linea cum mediali ſuperficie faciēs totam medialē α β, cui ſit commenſurabilis γ δ. dico lineam γ δ eſſe etiam lineam cum mediali ſuperficie facientem totam medialē. Sit enim lineæ α ε linea cōueniēter iuncta β ι, & fiant cætera, ut in ſuperioribus.

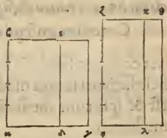


ergo lineæ α ι, β ι ſunt potētia incommenſurabiles facientes compoſitum ex quadratis ipſarum mediale, id uero quod ſit ex ipſis etiā mediale: & compoſitum ex quadratis incommenſurabile ei, quod ſit ex ipſis. Sunt autē, ut antea demonſtratum eſt lineæ α ι, ε ι commenſurabiles lineis γ ζ, δ ζ, & compoſitum ex quadratis ipſorum α ι, ε ι commenſurabile compoſito ex quadratis linearum γ ζ, δ ζ: id uero quod ſit ex α ι, ε ι cōmenſurabile ei, quod ſit ex γ ζ, δ ζ. ergo & lineæ γ ζ, δ ζ, ſunt potentia incommenſurabiles facientes cætera omnia quæ lineæ α ι, ε ι. Ergo linea γ δ eſt cum mediali ſuperficie faciens totam medialem.

Centeſimumoctauum Theorema.

Si de ſuperficie rationali detrahatur ſuperficies me-

dialis, linea quæ reliquam ſuperficiem poteſt, eſt alterutra ex duabus irrationalibus, aut reſiduum aut linea minor.



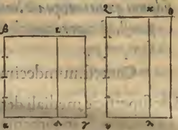
De ſuperficie rationali β γ detrahatur ſuperficies medialis β δ. dico lineam quæ reliquam ſuperficiẽ ε γ poteſt, eſſe alterutram ex duabus irrationalibus, aut reſiduũ aut lineã minorem. Sit enim linea rationalis ζ κ, ſecundum quam æqualis ſuperficiei β γ applicetur ſuperficies rectangula parallelogramma κ θ: ſuperficiei uero ϵ δ æqualis applicetur ſuperficies parallelogrammo κ λ. reliquum ergo parallelogrammũ ε γ eſt æquale reliquo parallelogrammo λ θ. Cum igitur ϵ γ ſit rationale, ipſum uero ϵ δ ſit mediale, ergo & κ θ erit rationale: ipſum uerò κ λ mediale. ergo & linea ζ θ erit rationalis longitudine commenſurabilis ipſi ζ κ per 21: linea uero ζ λ erit rationalis longitudine incommenſurabilis eidem lineæ ζ κ per 23. ergo linea ζ θ erit longitudine incommenſurabilis lineæ ζ λ per 13. ergo lineæ ζ θ ζ λ ſunt rationales potentia tantum commenſurabiles: ergo linea λ θ erit reſiduũ, ipſi uero conuenienter iuncta linea λ ζ: linea autem ζ θ plus poteſt, quàm linea ζ λ, aut quadrato lineæ longitudine ſibi commenſurabilis, aut quadrato lineæ ſibi longitudine incommẽſurabilis. Poſsit prius quadrato lineæ ſibi longitudine commenſurabilis, cum ſit tota ζ θ longitudine commenſurabilis lineæ rationali ζ κ. ergo linea λ θ eſt reſiduum primum.

ergo

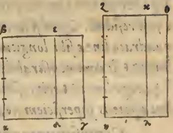
ergo per 91 linea potens parallelogrammum λ θ, hoc eſt ι γ eſt reſiduũ. Quòd ſi linea ζ θ plus poßit quã linea ζ κ quadrato lineæ ſibi longitudine incommẽſurabilis, cum linea ζ θ ſit commenſurabilis longitudine lineæ rationali ζ κ, ergo linea κ θ erit reſiduum quartum. Ergo per 94 *linea potens ſuperficiem λ θ, hoc eſt γ ι eſt linea minor.*

Centeſimumnonum Theorema.

Si de ſuperficie mediali detrahatur ſuperficies rationalis, aliæ duæ irrationales fiunt, aut reſiduum mediale primum, aut cum rationali ſuperficie faciens totam medialem.



De *ſuperficie mediali β γ detrahatur rationalis ſuperficies β δ, dico lineã quæ poteſt ſuperficiem reliquã ι γ eſſe alterutram duarum irrationaliũ, uel reſiduũ mediale primum, uel cum rationali ſuperficie faciẽtem totã medialem. Sit rationalis linea ζ κ, ſecundũ quam applicentur ſuperficies, ut in proximo dictum eſt: erit ſimiliter linea ζ θ rationalis & longitudine incommenſurabilis lineæ ζ κ: linea uerò ζ κ erit rationalis longitudine commenſurabilis eidem ζ κ: & lineæ ζ θ, ζ κ rationales erunt potentia tantum cõmenſurabiles. ergo linea κ θ erit reſiduum: illi uerò conuenienter iuncta linea ζ κ. Linea autem ζ θ plus poteſt quàm linea ζ κ, uel quadrato lineæ ſibi longitudine commenſurabilis, uel quadrato lineæ ſibi longitudine incõ-*

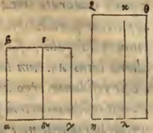


menſurabilis.Et quidem ſi linea ζθ plus poteſt quàm lineæ ζκ quadrato lineæ ſibi longitudine commenſurabilis,cũ linea cõuenienter iuncta ζκ ſit longitudine commenſurabilis lineæ rationali ζκ,ergo linea κθ erit reſiduum ſecũdum:quare linea quæ ſuperficiem λθ,hoc eſt ιγ poteſt,eſt reſiduũ mediale primũ per 92.Quòd ſi linea ζθ plus poteſt quã linea ζκ quadrato lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis, cum linea conuenienter iuncta ſit longitudine commẽſurabilis lineæ rationali ζκ,ergo linea κθ erit reſiduum quintum: quare linea quæ ſuperficiẽ λθ,hoc eſt, ιγ poteſt,eſt cum rationali ſuperficie faciens totam medialem per 95.

Centeſimumdecimum Theorema.

Si de ſuperficie mediali detrahatur ſuperficies medialis,quæ ſit incõmenſurabilis toti,reliquæ duæ fiunt irrationales,aut reſiduum mediale ſecundum,aut cum mediali ſuperficie faciens totam medialem.

Sicut in præcedentibus deſcriptionibus,hîc quoque detrahatur de ſuperficie mediali βγ ſuperficies medialis βδ: quæ βδ ſit incommenſurabilis toti βγ.dico lineam quæ poteſt ſuperficiem ιγ,eſſe alterutram duarũ irrationalium,uel reſiduum mediale ſecundũ,uel cum mediali ſuperficie facientem totam medialem.Cum enim utraque ſuperficies

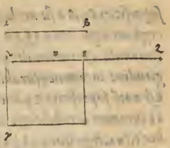


ſuperficies ε γ, ε δ ſit medialis, ergo utraque linea ζ θ, ζ κ eſt rationalis, & rationali ζ κ lõgitudine incommenſurabilis. Eſt autẽ ſuperficies β γ, hoc eſt κ θ incommẽſurabilis ipſi β δ, hoc eſt η κ. ergo lineæ ζ θ, ζ κ ſũt incommenſurabiles: ergo ſunt rationales potentia tantum commenſurabiles. ergo linea κ θ erit reſiduum: ipſi uero conuenienter iuncta, ζ κ. linea autem ζ θ plus poteſt quàm linea ζ κ, uel quadrato lineæ ſibi longitudine commenſurabilis, uel lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis. Et quidẽ ſi linea ζ θ plus poteſt, quàm ζ κ quadrato lineæ ſibi longitudine commenſurabilis. cum neutra ex ζ θ, ζ κ ſit longitudine commenſurabilis ipſi rationali ζ κ, ergo linea κ θ erit reſiduum tertium. ergo per 93. linea quæ poteſt ſuperficiem λ θ, hoc eſt ε γ erit reſiduum mediale ſecundũ. Quòd ſi linea ζ θ plus poteſt quàm linea ζ κ quadrato lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis, cum neutra ex ζ θ, ζ κ ſit longitudine commenſurabilis ipſi rationali ζ κ, ergo linea κ θ erit reſiduum ſextũ. Ergo per 96 linea quæ ſuperficiem λ θ, hoc eſt ε γ poteſt, erit cum mediali ſuperficie faciens totam medialem.

Centeſimumundecimum Theorema.

Linea quæ reſiduum dicitur, non eſt eadem cum ea quæ dicitur binomium.

Sit reſiduum α β, dico α β non eſſe idem cum binomio. Nam *ſi eſſe poteſt, eſt. Sitq; linea rationalis δ γ, ſecũdum quam*



æquale quadrato lineæ α β applicetur parallelogrammum rectangulũ γ ε faciens alterũ latus δ ε. cum linea α β ſit reſiduum, ergo linea δ ε erit reſiduum primũ per 97. Sit ipſi cõuenienter iuncta ε ζ, ergo lineæ δ ζ, ζ ε ſunt rationales potentia tantũ commẽſurabiles, & linea δ ζ plus poteſt quàm linea ε ζ quadrato lineæ ſibi longitudine cõmenſurabilis: & δ ζ, eſt longitudine cõmenſurabilis rationali γ δ. Rurſus per poſitionem linea α β eſt binomium, ergo linea δ ε eſt binomium primum per 60. Diuidatur in ſua nomina in puncto η: ſitq; maius nomẽ δ η, ergo lineæ δ η, η ε ſunt rationales potentia tantum commẽſurabiles, & linea δ η plus poteſt quàm linea η ε quadrato lineæ ſibi longitudine commenſurabilis, eademq; linea δ η eſt longitudine commenſurabilis rationali γ δ. Ergo per 12 lineæ δ η, δ ζ ſunt longitudine commenſurabiles: ergo & reliqua linea η ζ erit longitudine commenſurabilis toti δ ζ per 16, aut per corollarium eiuſdem. Cum igitur linea δ ζ ſit cõmenſurabilis lineæ ζ η, ſit autem linea δ ζ rationalis, rationalis quoque erit ζ η. Cum autem linea δ ζ ſit longitudine commenſurabilis lineæ ζ η: ſit autem linea δ ζ longitudine incommenſurabilis lineæ ε ζ, ergo per 14 lineæ ζ η, ζ ε ſunt longitudine incommenſurabiles. Sunt autem ambæ rationales, ergo lineæ ζ η, ζ ε ſunt rationales potentia tantum commẽſurabiles. ergo linea ε η erit reſiduũ: ſed eſt rationalis ut modo concluſum eſt: hoc autem eſt impoſſibile

impoſſibile, eandẽ ſcilicet lineam eſſe rationalem & irrationalem, ergo reſiduum nõ erit idem quod binomiũ. Linea quæ reſiduũ dicitur, & cæteræ quinq; eam conſequentes irrationales, neque lineæ mediali neque ſibi ipſæ inter ſe ſunt eædem. Nam quadratũ lineæ medialis ſecundum rationalem applicatum, facit alterum latus rationalem lineam longitudine incommẽſurabilem ei, ſecundum quam applicatur per 23. quadratũ uerò reſidui ſecundum rationalem applicatum, facit alterũ latus reſiduum primum per 97. quadratum uerò reſidui medialis primi ſecundum rationalem applicatum, facit alterum latus reſiduum ſecũdum per 98. quadratum uerò reſidui medialis ſecundi, facit alterum latus reſiduum tertium per 99. quadratum uerò lineæ minoris, facit alterum latus reſiduum quartum per 100. quadratum uero lineæ cum rationali ſuperficie facientis totam medialem, facit alterum latus reſiduum quintum per 101. quadratum uero lineæ cum mediali ſuperficie facientis totam medialem ſecundum rationalem applicatum, facit alterum latus reſiduum ſextum per 102. Cum igitur dicta latera quæ ſunt latitudines cuiuſque parallelogrammi unicuique quadrato æqualis & ſecundum rationalem applicati differãt, & à primo latere & ipſa inter ſe; (nam à primo differunt, quoniam eſt rationalis linea: inter ſe uero differũt, quoniam ſunt reſidua non eiuſdem ordinis) conſtat ipſas quoq; lineas irrationales inter ſe differentes eſſe. Et quoniam demonſtratum eſt reſiduum non eſſe idem quod binomiũ: quadrata autem reſidui & quinque linearum irrationa-

lium illud conſequentium ſecundum rationalem applicata, faciunt altera latera ex reſiduis eiuſdem ordinis, cuius ſunt & reſidua, quorũ quadrata applicantur rationali: ſimiliter & quadrata binomij & quinque linearum irrationalium illud conſequentium ſecundum rationalem applicata, faciũt altera latera ex binomijs eiuſdem ordinis, cuius ſunt & binomia, quorũ quadrata applicantur rationali. ergo lineæ irrationales quæ conſequuntur binomium, & quæ conſequũtur reſiduũ, ſunt inter ſe differentes. Quare dictæ lineæ omnes irrationales ſunt numero 13.

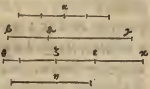
1. *Medialis.*
2. *Binomium.*
3. *Bimediale primum.*
4. *Bimediale ſecundum.*
5. *Maior.*
6. *Potens rationale & mediale*
7. *Potens duo medialia.*
8. *Reſiduum.*
9. *Reſiduum mediale primum.*
10. *Reſiduũ mediale ſecundum.*
11. *Minor.*
12. *Faciens cum rationali ſuperficie totam medialem.*
13. *Faciens cum mediali ſuperficie totam medialem.*

Centeſimumduodecimum Theorema.

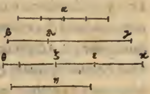
Quadratum, lineę rationalis ſecundum binomium applicatum facit alterum latus reſiduũ, cuius nomina ſunt commẽſurabilia binomij nominibus, & in eadem proportione: præterea id quod fit reſiduũ, eundẽ ordinem retinet quem binomium.

Sit linea rationalis α, binominm βγ, cuius maius nomen ſit γδ: & quadrato lineæ α ſit æquale parallelogrammum ex

ex β γ, ε ζ. dico lineam ε ζ eſſe reſiduũ, cuius nomina ſunt commenſurabilia nominibus ipſius binomij β γ, quæ nomina ſunt γ δ, δ ϐ: & in eadem proportione præterea linea ε ζ eundẽ ordinem & locũ tenet inter reſidua, quẽ binomium ϐ γ retinet inter binomia. Sit rurſus quadrato lineæ α æquale parallelogrammum ex ϐ δ, η. Cum igitur parallelogrammum ex ϐ γ, ε ζ ſit



æquale parallelogrãmo ex ϐ δ, η, cum utrunq; ſit æquale quadrato lineæ α, eſt igitur ſicut linea γ β ad lineam ϐ δ, ita linea η ad lineam ε ζ per 14.6. ſed γ ϐ eſt maior quàm β δ, ergo & η erit maior quàm ε ζ. Sit linea ε θ æqualis lineæ η. eſt ergo ſicut γ β ad γ δ, ita θ ε ad ε ζ per 7.5. ergo diſiuncta proportione per 17.5. ſicut γ δ ad β δ, ita θ ζ ad ζ ε. fiat ſicut θ ζ ad ζ ε, ita ζ κ ad ε κ, (quod quẽadmodum fiat dicemus ad finem demonſtrationis.) ergo per 12.5. ſicut linea ζ κ ad lineam ε κ, ita tota linea θ κ ad totã ζ κ. Sed ſicut ζ κ ad ε κ, ita eſt γ δ ad δ β: (quia ζ κ eſt ad ε κ ſicut θ ζ ad ζ ε, & θ ζ ad ζ ε eſt ſicut γ δ ad δ β.) ergo ſicut linea θ κ ad ζ κ, ita γ δ ad δ β. ſed quadratum lineæ γ δ eſt commenſurabile quadrato lineæ δ β, ergo & quadratum lineæ θ κ quadrato lineæ ζ κ erit commẽſurabile per 22.6 & 10 huius. Sed tres lineæ θ κ, ζ κ, ε κ ſunt proportionales in continua proportione: (ut modo dictum eſt.) ergo per ſecundum corollarium 20. 6 quadratum lineæ θ κ erit ad quadratũ lineæ ζ κ, ſicut linea θ κ ad lineam ε κ. ergo linea θ κ erit longitudine commenſurabilis lineæ ε κ: quare per 16 linea θ ε erit longitudi-

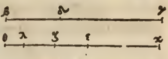


ne commẽſurabilis lineæ ι κ. Et *quoniam quadratũ lineæ α eſt æquale parallelogrãmo ex θ ι, β δ, & quadratum lineæ α eſt rationale, ergo & parallelogrammũ ex θ ι, β δ erit rationale. ergo per 21 linea θ ι erit rationalis & longitudine cõmenſurabilis lineæ β δ: quare & linea ι κ, quæ eſt ipſi θ ι longitudine commẽſurabilis, erit etiam rationalis & longitudine commẽſurabilis ipſi β δ.* Cum igitur *ſit ſicut linea γ δ ad δ β, ita ζ κ ad ι κ: (quia ſupra dictum eſt, ſicut γ δ ad δ β, ita θ ζ ad ζ ι, & ſicut θ ζ ad ζ ι, ita ζ κ, ad ι κ,) lineæ uero γ δ, δ β ſint potentia tantum commenſurabiles, ergo & lineæ ζ κ, ι κ erunt potentia tantum commenſurabiles.* Et cum *ſit ſicut γ δ ad δ β, ita ζ κ ad ι κ, ergo cõuerſa proportione ſicut δ β ad γ δ, ita ι κ ad ζ κ: & permutata proportione ſicut δ β ad ι κ, ita γ δ ad ζ κ: ſed lineæ δ β, ι κ ſunt longitudine commenſurabiles, (ut modo probatum eſt) ergo & lineæ γ δ, ζ κ ſunt longitudine commẽſurabiles: ſed linea γ δ, eſt rationalis, ergo & linea ζ κ erit etiam rationalis: ergo lineæ ζ κ, ι κ ſunt rationales potẽtia tantum commẽſurabiles. ergo linea ζ ι erit reſiduum, cuius nomina ſunt commenſurabilia nominibus binomij & in eadem proportione. dico præterea illud reſiduum eſſe eiuſdem ordinis cuius & binomiũ.* Nam *linea γ δ plus poteſt, quàm linea β δ aut quadrato lineæ ſibi longitudine commenſurabilis, aut lineæ incommenſurabilis: & quidem ſi linea γ δ plus poteſt, quàm β δ quadrato lineæ ſibi longitudine commẽſurabilis, ſimiliter & linea*

ζ κ

ζκ plus poterit quàm linea ικ quadrato lineæ ſibi commenſurabilis longitudine per 15. *Et quidẽ ſi linea γ δ eſt longitudine commẽſurabilis lineæ rationali, cum modo probatum ſit lineas γ δ, ζ κ eſſe longitudine commenſurabiles, ergo per* 12 *etiam linea ζ κ erit longitudine commenſurabilis lineæ rationali: tunc igitur linea β γ erit binomium primum, ſimiliter & linea ζ ι erit reſiduum primũ. Quòd ſi linea β δ fuerit longitudine commenſurabilis lineæ rationali, ſimiliter & linea ι κ erit eidẽ cõmenſurabilis: tunc ergo linea β γ erit binomium ſecundum, & linea ζ ι reſiduum ſecundum. Quòd ſi neutra ex γ δ, δ β fuerit rationali commenſurabilis, ſimiliter neutra ex ζ κ, ι κ erit eidem commenſurabilis, tunc erit linea β γ binomium tertium, & linea ζ ι reſiduum tertium. Quòd ſi linea γ δ plus poteſt quàm linea β δ quadrato lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis, ſimiliter & linea ζ κ plus poterit quàm ι κ quadrato lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis per* 15. *Et quidem ſi linea γ δ fuerit longitudine commenſurabilis lineæ rationali, etiam linea ζ κ erit eidem commenſurabilis, tunc erit linea β γ binomium quartum, & linea ζ ι reſiduum quartum. Quòd ſi linea β δ fuerit rationali commenſurabilis, ſimiliter & linea ι κ erit eidem commenſurabilis, tunc linea β γ erit binomium quintũ: & linea ζ ι reſiduũ quintũ. Quòd ſi neutra ex γ δ, β δ erit rationali commenſurabilis, ſimiliter neutra ex ζ κ, ι κ erit eidem commenſurabilis, tunc linea β γ erit binomium ſextum, & linea ζ ι reſiduum ſextum.* Ergo linea *ζ ι erit reſiduum, cuius nomina, nempe ζ κ, ι κ ſunt com-*

menſurabilia nominibus binomij ϛγ, nominibus inquã γδ, δβ: & ſunt in eadem proportione, & habent eundem ordinem & locum inter reſidua quem binomium inter binomia. Nunc illud dicamus quomodo fiat ſicut linea θζ ad lineam ζι, ita linea ζκ ad lineam ικ. linea γδ eſt maior linea βδ. ergo

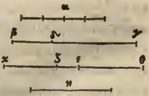


& linea θζ erit maior linea ζι. Detrahatur de linea θζ æqualis linea ζι, quæ ſit ζλ per 3.1. Et reliqua ſit θλ. ergo linea θλ erit minor quam linea θζ, quia θζ eſt æqualis lineis θλ, λζ. fiat ſicut θλ, ad θζ, ita ζι ad ζκ per 12.6: ergo per conuerſam proportionem ſicut θζ ad θλ, ita ζκ ad ζι. Ergo per euerſam proportionem ſicut linea θζ ad λζ, hoc eſt ad ei æqualem ζι, ita linea ζκ ad ικ.

Centeſimum decimumtertium Theorema.

Quadratum lineæ rationalis ſecundum reſiduum applicatum, facit alterum latus binomium, cuius nomina ſunt commenſurabilia nominibus reſidui & in eadem proportione: præterea id quod fit binomium eſt eiuſdẽ ordinis, cuius & reſiduum.

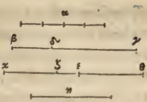
Sit linea rationalis α, reſiduũ uerò βδ: & quadrato lineæ α ſit æquale id quod fit ex βδ, κθ: itaque quadratum lineæ rationalis α ſecundũ ϛδ reſiduũ



applicatum, facit alterum latus κθ. dico lineam κθ eſſe binomium cuius nomina ſunt commenſurabilia nominibus ipſius βδ & in eadem proportione: & lineã κθ

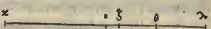
eſſe

eſſe eiuſdem ordinis binomium, cuius & β δ eſt reſiduũ. Sit lineæ β δ linea cõueniẽter iuncta δ γ, ergo lineæ β γ, δ γ ſunt rationales potentia tantum commenſurabiles. & quadrato lineæ α æquale ſit parallelogrammum ex β γ, ϰ: ſed quadratum lineæ α eſt rationale, ergo & parallelogrammum ex β γ, ϰ eſt etiam rationale: ergo & linea ϰ erit rationalis longitudine commenſurabilis lineæ β γ. Cum igitur parallelogrammum ex β γ, ϰ ſit æquale ei quod ſit ex β δ, κ θ, ergo ſicut β γ ad β δ, ita κ θ ad ϰ: ſed β γ eſt maior quam β δ, ergo & linea κ θ erit maior quàm ϰ. Sit lineæ ϰ æqualis linea κ ι, ergo linea κ ι erit rationalis longitudine commẽſurabilis linea β γ ſicut & linea ϰ: & cum ſit ſicut β γ ad β δ, ita κ θ ad κ ι. euerſa ergo proportione ſicut β γ ad δ γ, ita κ θ ad ι θ. fiat ſicut κ θ ad ι θ, ita linea ζ θ ad ι ζ, (quod quemadmodum fiat, dicemus ad finẽ demonſtrationis.) ergo erit reliqua κ ζ ad reliquam ζ θ, ſicut tota κ θ ad totã θ ι per 19.5, hoc eſt ſicut β γ ad γ δ: ſed lineæ β γ, γ δ ſunt potentia tantũ commenſurabiles, ergo & lineæ κ ζ, ζ θ erunt potentia tantum commẽſurabiles. Et quoniam eſt ſicut κ θ ad θ ι, ita κ ζ ad ζ θ, ſed & ſicut κ θ ad θ ι, ita θ ζ ad ζ ι, ergo ſicut κ ζ ad ζ θ, ita ζ θ ad ζ ι: quare ſicut prima ad tertiam, ita quadratum primæ ad quadratum ſecundæ. ergo ſicut κ ζ ad ζ ι, ita quadratum lineæ κ ζ ad quadratum lineæ ζ θ: ſed hæc quadrata ſunt commẽſurabilia, quia lineæ κ ζ, ζ θ ſunt potentia commenſurabiles. ergo lineæ κ ζ, ζ ι ſunt longitudine commenſurabiles. Quare per ſecundã partem 16. lineæ κ ι, ι ζ ſunt longitudine commenſurabiles: quare per eandem 16. & lineæ κ ζ, κ ι ſunt longitu-



dine commenſurabiles: ſed linea κ ε eſt rationalis & longitudine commenſurabilis lineæ ϐ γ. ergo & linea κ ζ erit rationalis & longitudine commenſurabilis eidem ϐ γ. Et *quoniã eſt ſicut linea β γ ad γ δ, ita κ ζ ad ζ θ, permutata ergo proportione ſicut β γ ad κ ζ, ita γ δ ad ζ θ: ſed linea β γ eſt longitudine commẽſurabilis lineæ κ ζ. ergo & linea γ δ erit longitudine cõmẽſurabilis lineæ ζ θ: ſed linea γ δ eſt rationalis, ergo & linea ζ θ erit rationalis: ſed & lineæ β γ, γ δ ſunt potentia tantum commenſurabiles: ergo & lineæ κ ζ, ζ θ ſunt rationales potentia tantum commenſurabiles.* Ergo *linea κ θ erit binomium, cuius nomina ſunt commẽſurabilia nominibus reſidui, & in eadem proportione. dico præterea illud binomium eſſe eiuſdem ordinis cuius, & reſiduum ϐ δ.* Nam *ſi β γ plus poteſt quàm γ δ quadrato lineæ ſibi longitudine commenſurabilis, etiã linea κ ζ poterit plus quàm ζ θ quadrato lineæ ſibi longitudine cõmenſurabilis per* 15. Q*uòd ſi linea ϐ γ fuerit longitudine commenſurabilis lineæ rationali, etiam linea κ ζ erit eidem rationali commẽſurabilis longitudine per* 12: *quia lineæ β γ, κ ζ ſunt longitudine commenſurabiles: & ſic erit linea ϐ δ reſiduum primum, & linea κ θ ſimiliter binomium primum.* Q*uòd ſi γ δ fuerit longitudine commenſurabilis rationali, etiam linea ζ θ erit eidem longitudine commenſurabilis: & ſic erit linea β δ reſiduum ſecundum, & linea κ θ binomiũ ſecundũ.* Q*uòd ſi neutra ex β γ, γ δ fuerit rationali commenſurabilis longitudine*

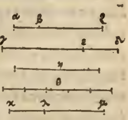
tudine, neutra etiam ex κ ζ, ζ θ erit eidem commenſurabilis: & ſic erit linea β δ reſiduum tertium, & linea κ θ binomium tertium. Si *uero linea ϐ γ plus poteſt quàm linea γ δ quadrato lineæ ſibi longitudine incommēſurabilis, etiam linea κ ζ poterit plus quàm linea ζ θ quadrato lineæ ſibi longitudine incōmenſurabilis per* 15. Et *quidem ſi linea β γ fuerit longitudine commenſurabilis rationali, etiam κ ζ erit eidem commēſurabilis longitudine: & tunc linea ϐ δ erit reſiduum quartū, & linea κ θ binomium quartū. Quòd ſi γ δ fuerit rationali commēſurabilis longitudine, etiam ζ θ erit eidem commenſurabilis longitudine: & tunc erit linea β δ reſiduum quintum, & linea κ θ binomiū quintum. Quòd ſi neutra ex β γ, γ δ fuerit longitudine commēſurabilis rationali, ſimiliter neutra ex κ ζ, ζ θ erit eidem cōmenſurabilis longitudine: & ſic linea β δ erit reſiduū ſextum, & linea κ θ binomium ſextum.* Ergo *κ θ erit binomium, cuius nomina κ ζ, ζ θ ſunt commēſurabilia reſidui ϐ δ nominibus β γ, γ δ, & in eadem proportione: & linea κ θ retinet inter binomia eundem ordinem quem ϐ δ inter reſidua.* Nunc *dicamus quomodo fiat ſicut linea κ θ ad lineam θ ι, ita linea θ ζ ad lineā ζ ι.* Lineæ *κ θ ad*



datur in continuum & directum linea æqualis ipſi θ ι: & ſit tota linea κ λ: & per 10.6 *diuidatur linea θ ι ſicut tota linea κ λ diuiſa eſt in puncto θ: ſitq; linea θ ι diuiſa in puncto ζ.* Erit *ſicut κ θ ad θ λ, hoc eſt ad θ ι, ita θ ζ ad ζ ι &c.*

Centeſimumdecimumquartum Theorema.

Si parallelogrammum contineatur ex reſiduo & binomio, cuius nomina ſint commenſurabilia nominibus reſidui & in eadem proportione, linea quæ illam ſuperficiem poteſt, eſt rationalis.



Contineatur parallelogrammum ex reſiduo αβ & binomio γδ, cuius binomij maius nomẽ ſit γε, minus uero εδ: & ſint commenſurabilia nominibus reſidui αβ, quæ ſint αζ, ζβ, & in eadem proportione. ſitq́; potens illud parallelogrammum linea, η. dico lineam illam η, eſſe rationalem. Proponatur rationalis θ, cuius quadrato æquale ſecundum lineam γδ applicetur parallelogrammum faciens alterum latus κλ. ergo linea κλ eſt reſiduum per 112: cuius nomina ſint κμ, μλ quæ ſunt commenſurabilia binomij nominibus γε, εδ, & in eadem proportione per 112. Sed per poſitionem lineæ γε, εδ ſunt commenſurabiles lineis αζ, ζβ, & ſunt in eadẽ proportione: erit ergo ſicut αζ ad ζβ, ita κμ ad μλ. ergo permutata proportione ſicut αζ ad κμ, ita ζβ ad μλ. ergo & reliqua αβ ad reliquam κλ erit ſicut αζ ad κμ. ſed linea αζ eſt commenſurabilis lineæ κμ, quia utraque ex αζ, κμ eſt cõmenſurabilis lineæ γε: ergo & linea αβ erit commenſurabilis lineæ γλ. eſt autem ſicut linea αβ ad lineam κλ, ita parallelogrammum ex γδ, αβ ad parallelogrammum ex γδ, κλ per 1.6. ergo parallelogrammum ex γδ, αβ eſt commẽſurabile parallelogrammo ex γδ, κλ: ſed parallelogrammum ex γδ, κλ eſt æquale quadrato lineæ θ, ergo parallelogrammũ ex γδ, αβ eſt

commen-

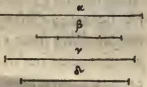
commenſurabile quadrato lineæ θ: ſed parallelogrammum ex γ δ, α β eſt æquale quadrato lineæ ι, ergo quadratum lineæ θ erit commenſurabile quadrato lineæ κ. ſed quadratum lineæ θ eſt rationale, ergo & quadratū lineæ κ erit rationale. ergo & linea κ erit rationalis: & poteſt parallelogrammum ex α β, γ δ. Ergo ſi parallelogrammum contineatur &c.

Corollarium.

Ex *hoc manifeſtū eſt, poſſe rationale parallelogrammum contineri ex lineis irrationalibus.*

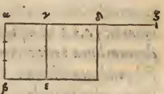
Centeſimumdecimumquintum Theorema.

Ex linea mediali naſcuntur lineæ irrationales innumerabiles, quarū nulla ulli ante dictorū eadē ſit.



Sit linea medialis α γ. dico ex linea α γ innumerabiles gigni irrationales, quarū nulla ulli ex antedictis irrationalibus eadē ſit. Ducatur *ſuper extremitate lineæ α γ perpendicularis α ϛ, quæ ſit rationalis: & cōpleatur parallelogrammū ϛ γ, ergo illud parallelogrāmū β γ erit irrationale per ea quæ dicta ſunt in fine demōſtrationis 38: linea ergo quæ illud poteſt, erit ſimiliter irrationalis.* Sit *autē illa linea γ δ, quæ nulli ex ante dictis irrationalibus erit eadē: quia quadratū huius γ δ ſecundū lineā rationalē puta α ϛ applicatū, facit alterum latus lineā medialem nempe α γ: nullius uero ex antedictis quadratum ſecundum rationalem applicatum, facit alterum latus lineam medialem.* Rurſus

compleatur parallelogrammum ε δ, erit ſimiliter illud parallelogrammum ε δ irrationale, & linea quæ illud poteſt etiã irrationalis, quæ

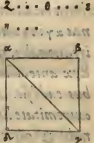


ſit δ ζ: hæc ſimiliter nulli ex antedictis irrationalibus eadem eſſe poteſt. Nullius enim ex antedictis irrationalibus quadratum ſecundum rationalem applicatum facit alterum latus lineã γ δ. Ergo ex linea mediali &c.

Centeſimumdecimumſextum Theorema.

Propoſitum nobis eſto, demonſtrare in figuris quadratis diametrum eſſe longitudine incommenſurabilem ipſi lateri.

Sit quadratum, α β γ δ, cuius diameter α γ. dico lineam α γ eſſe longitudine incommenſurabilem lineæ α β. ſi enim poſſit fieri, ſit commẽſurabilis: dico tunc illud conſequi eundem numerum eſſe parem & imparem. Manifeſtum eſt quadratum lineæ α γ eſſe duplum ad quadratũ



lineæ α β per 47. 1. Et quoniam linea α γ eſt longitudine commenſurabilis lineæ α β per hypotheſin, ergo habebunt proportionem inter ſe, quam numerus ad numerũ per 5 huius. Habeat linea α γ ad lineã α β proportionẽ, quam numerus ε ζ, ad numerum η: ſintq; illi numeri minimi omnium habentium eandem proportionẽ: nõ igitur numerus ε ζ erit unitas. Nam ſi ε ζ eſſet unitas, cum habeat proportionem ad η, ſicut linea α γ ad lineam α β,

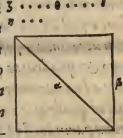
maior

maior autem ſit α γ quàm α β: maior ergo eſſet ι ζ unitas quàm numerus κ, quod eſt impoſsibile. ergo ι ζ non eſt unitas, eſt ergo numerus. Et *quoniam eſt ſicut quadratũ lineæ α γ ad quadratum lineæ α β, ita quadratus numerus productus ex ι ζ ad quadratum numerum productum ex κ: nam utrobique eſt proportio ſuorum laterũ duplicata per corollarium 20.6 & 11.8: proportio autem lineæ α γ ad lineam α β duplicata, eſt æqualis proportioni numeri ι ζ, ad numerum κ duplicatæ, quia eſt ſicut α γ ad α β, ita numerus ι ζ ad numerũ κ: quadratum uero lineæ α γ eſt duplum ad quadratum lineæ α β, ergo & quadratus productus ex numero ι ζ erit duplus ad numerum quadratum productum ex κ. ergo numerus quadratus ex ι ζ eſt par: quare & ipſe ι ζ erit etiam par: nam ſi ι ζ eſſet impar, etiã quadratus ex ipſo ι ζ eſſet impar per 23.9, aut per 29.9. Secetur ι ζ æqualiter & bifariam ubi eſt θ: quoniam numeri ι ζ, κ ſunt minimi ſuæ proportionis, ſunt inter ſe primi per 24.7: & eſt ι ζ par, ergo numerus κ eſt impar.* Nam *ſi κ eſſet par, binarius numeraret utrunq; ι ζ, κ: (nam omnis numerus par habet partem dimidiam per definitionem) ſed illi numeri ι ζ, κ ſunt inter ſe primi: eſt ergo impoſsibile eos binario aut alio numero quàm unitate numerari. ergo numerus κ eſt impar.* Et *quoniam numerus ι ζ eſt duplus ad ι θ, ergo numerus quadratus ex ι ζ eſt quadruplus ad numerum quadratum ex ι θ.* Eſt *autem numerus quadratus ex ι ζ duplus ad numerum quadratum ex κ, ergo numerus quadratus ex κ, eſt duplus ad numerum quadratum ex ι θ. ergo numerus qua-*

dratus ex η eſt par, ergo & per ea quæ modo dicta ſunt ipſe numerus η eſt par: ſed probatum eſt eum eſſe imparem, quod eſt impoſsibile, non igitur linea α γ erit longitudine commenſurabilis lineæ α β. ergo erit longitudine incommenſurabilis.

Aliter.

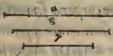
Alia ratione demonſtremus diametrum eſſe longitudine incommẽſurabilem ipſi lateri: ſi negetur, ſit diameter α, latus uero ſit β: fiatq; rurſus ſicut α ad β, ita numerus εζ ad numerum η, & ſint minimi ſuæ proportionis: ergo ſunt inter ſe primi. dico primo numerum η non eſſe unitatem: nam ſi poſsibile eſt, ſit unitas. Et *quoniam eſt quadratum lineæ α ad quadratum lineæ β, ſicut quadratus numerus ex εζ ad quadratum numerum ex η (ut dictum eſt in præcedẽti demonſtratione.) ſed quadratum lineæ α eſt duplum ad quadratum lineæ β, ergo numerus quadratus ex εζ ad numerum quadratum ex η, eſt duplus: ſed per te numerus η eſt unitas, ergo numerus quadratus ex εζ eſt binarius, quod eſt impoſsibile: nõ ergo η erit unitas, ergo erit numerus.* Et *quoniam eſt ſicut quadratum lineæ α ad quadratum lineæ β, ita quadratus numerus ex εζ ad quadratum numerũ ex η, ergo numerus quadratus ex εζ erit duplus ad numerum quadratum ex η: quare numerus quadratus ex η numerabit numerum quadratum ex εζ: ergo per 14,8 numerus η, numerabit numerum εζ: ſed etiã numerat ſeipſum, ergo numerus η numerabit*



merabit numeros ε, ζ: *cũ tamẽ ſint inter ſe primi, quod eſt impoßibile. ergo linea* α *non erit longitudine commẽſurabilis lineæ* β: *ergo erit eidem incommenſurabilis.*

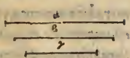
Hinc *animaduerti poſſe puto, neutram harum demõſtrationũ eſſe* Theonis, *ſed nec theorema ipſum eſſe* Euclidis: *nam & tractatio tota demonſtrandi habet quod refelli poßit, nec refert eam diligẽtiam, qua in cæteris uſum fuiſſe* Theonẽ *ex ipſo uidere poßumus. Et theorema ipſum uidetur non ſuo loco poſitum eſſe: debuit enim præcedere tractatum linearũ irrationaliũ.* Q*uanuis enim diameter ſit longitudine incommenſurabilis ipſi lateri, eſt tamen eidem commenſurabilis potentia: ergo ſi latus ipſum, aut diametrum poſueris eſſe lineam rationalem, neceſſario ſequitur & alterum, nempe latus ipſum aut diametrum eſſe rationalem, per definitionem linearum rationalium.* Huius *autem theorematis multo facillimã & certißimam demonſtrationem legere licet in eo libello, quem ſupra memorauimus* Ariſtotelis περὶ ἀτόμων γραμμῶν. Illud *quoq; quod ſequitur addititium eſſe nemo negauerit, qui intellexerit poſteriorem ipſius additionis partem pertinere ad libros conſequentes perſcriptos de ſolidis: quia tamẽ & uerum eſt quod dicitur & continet rerum ipſarum intelligentiam, prætermittendum nobis uiſum non eſt.*

R*epertis lineis rectis longituditudine inter ſe incommenſurabilibus, ut lineis* α, β, *reperiri poſſunt & aliæ quãplurimæ magnitudines ex binis dimẽſionibus*



conſtantes, quales ſunt plana ipſa ſiue ſuperficies, quæ

ſint inter ſe incommenſurabiles. Nam ſi inter lineas α,β ſumatur media linea proportionalis γ,per



13.6,erit ſicut linea α ad lineam β,ita ſimilis ſpecies figuræ deſcriptæ à linea α ad ſimilem ſuperficiem figuræ deſcriptæ à linea γ,ſimilis inquam ſpecies ad ſimilem ſpeciem ſimiliter deſcriptam,per ſecũdum corollarium 20 theorematis libri ſexti,hoc eſt,ſiue illæ ſint quadrata, (quæ ſemper ſunt inter ſe ſimiles) ſiue fuerint aliæ quæpiam ſpecies rectilineæ ſimiles,ſiue circuli circa diametros α,γ: nam circuli habent eandem proportionem inter ſe,quam quadrata ſuarum diametrorum per 2.12. ergo per ſecundam partem decimi theorematis huius libri,ſimilis ſpecies figuræ deſcriptæ à linea α, erit incommenſurabilis ſimili ſpeciei ſimiliter deſcriptæ à linea γ. Reperiuntur ergo hoc modo ſuperficies inter ſe incommenſurabiles.Simili ratione reperiuntur figuræ commenſurabiles,ſi poſueris lineas α,β eſſe inter ſe longitudine commenſurabiles. Cum hæc ita ſint,nunc demonſtremus etiam in ipſis ſolidis eſſe quædam inter ſe commenſurabilia,& quædam incommenſurabilia.Nam ſi ex ſingulis quadratis linearum α,β,uel alijs figuris rectilineis,quæ ſint illis quadratis æquales erexerimus,ſolida ſingula æquali altitudine,ſiue ſint illa ſolida ex ſuperficiebus æquidiſtantibus compoſita,ſiue pyramides, ſiue corpora ſerratilia,illa ſolida ſic erecta erunt inter ſe,ſicut etiam ipſorum baſes inter ſe,per 32.11,& per 5 & 6.12.De corporibus tamen ſerratilibus nullum eſt tale theorema.Et quidem ſi baſes ſolidorum fuerint inter

ter

ter ſe commenſurabiles, ſolida quoque erunt inter ſe cõmenſurabilia: quòd ſi baſes fuerint incommẽſurabiles, ſolida quoque erunt incommenſurabilia, per 10 huius libri decimi. At ſi fuerint circuli duo α, β, & ſuper ſingulos erecti coni ſiue cylindri, eadẽ altitudine erunt ſimiliter inter ſe coni, & cylindri inter ſe, ſicut ipſi circuli, qui ſunt eorum baſes per 11.12. Et quidem ſi circuli fuerint inter ſe commẽſurabiles, ſimiliter ipſi coni inter ſe, & cylindri inter ſe erunt cõmenſurabiles: quòd ſi fuerint circuli incommenſurabiles, ſimiliter & coni inter ſe, & cylindri inter ſe erunt incommẽſurabiles, per 10. huius. Vnde conſtat non in ſolis lineis & ſuperficiebus eſſe commenſurabilitatem aut incommẽſurabilitatem, ſed in ſolidis quoque eaſdem reperiri.

AD EVNDEM ILLVSTRISſimum Cardinalem Bellaium.

Hîc formas iam uictor ouãs, normámq; repono.
Hîc ego ſeceſſus uoti damnatus adibo
Phœbe tuos, ducẽ te ſaltus emenſus opacos:
Saxáque peruia nũc multis, prius hoſpita paucis
Exequata meo, quæ conceſſere labori.
Mox, tua dum magno cõcuſſus numine mentem
Thure uaporabit purus delubra ſacerdos:
Et ſacris operatus erit Belliaus aris,
Ipſe tua hoc iubeas monimentum dedicet arce.
Nam per nos tentare, nefas, ſine uate profanos,
Comperto ut ſpatium quadrata æquale duobus

Redderet ex ternis cuneo, quæ ſubdita recto
Linea,Pythagoras Samius lectiſſima centum
Terga boum impoſuit,uictor ceu ſplendidus,aris
Pieridum,magnis ſibi parua rependere uiſus.
Tanto illi potior multis ſapientia nummis.
Ipſe quoque imparibus donis imitatus eoſdem,
Sit mihi fas,animos,at non ita diſſimili in re,
Parua quidē illa tibi,ſed quæ mihi maxima,ſoluā
Munera.Diis quando putas gratiſſima merces,
Me uotiua pium teſtabitur uſque tabella.
Noſtra tibi è multis cantabit pagina paucas
O Phœbi genus,inculto Sapientia laudis
Carmine,quoq; modo geminas res miſcuit uſus:
Et Sophiæ coniunctus amor noua nomina duxit,
Cuius ut exemplo ſimul & ſermone fruamur.
Nanque homines ſeclis quondam ſenioribus uſi,
Qui ſtudiis animos & tempora longa dederunt,
Naturæ in rebus,ſapientum nomen adepti.
Quæ cum Pythagorę ratio manaſſet in æuum,
Non tulit inuidiam ſenior: nam forte Leonti
Cui regnata Phlinus,quondam cōgreſſus,& ore
Dum reſerat magno naturę arcana parentis,
Admiranda dedit diuini ſigna uigoris.
Ingenio neque uiſa minor facundia ſummo.
Quęrentíque uiro,qua nam confideret arte,
Ille quidē eſſe negat quicquā ullius artis in ipſo,
Sed ſtudiis æterna tuis Sapientia duci,
Hinc ſibi philoſophi nomen finxiſſe nouum ſe.
Attonitus uocis nouitate,rogat quid in hac re

Poneret,

Poneret,an reliquos inter diſcrimen & iſtos.
Nec minimum diſcrimẽ,ait,quod ut ipſe doceri
Me referente queas,in imagine cuncta notabo.
Nonne uides quãtis celebrentur Olympia ludis?
Quàm multis cuiuſque modi mercatus abũdet,
Cętibus ille frequẽs glomerantibus?huic ego uitã
Perſimilẽ eſſe hominũ dicam. Nam corporis illic
Pluribus ut uires,uarióque exercita motu
Fortia mẽbra ſolẽt celebres parere inde coronas,
Tenuia gloriolę pereuntis pabula,quæſtus.
Excitat hos,aliena ut emant,aut ut ſua uendant.
Quos præter genus illud ineſt, longe anteferẽdũ
Nobilitate aliis,laudem captantibus & rem:
Nec quoquã minus ingenuũ,qui nec ſibi plaudi
Fronde coronatis optent,neq; creſcere nummos.
Hoc tantum,rerum quid ab unoquoq; geratur:
Et quo quidque modo,cura ſtudióque ſagaci
Luſtrantes recolunt,& ab omni parte uorantes,
Intentis iucunda oculis ſpectacula quærunt.
Haud aliter quàm qui mercatũ aliunde profecti,
Nos etiam ex aliis alias peruenimus oras:
Terrarúmque ſolum exilio ſortimur habendum.
Hic alios quæſtus,popularis gloria famę
Sunt quos uana tenet multi:pleríſque uoluptas
Imperat,in multis morbi non ſimplicis eſt uis.
Sed q̃d ago?ĩnumerósne parẽ enumerare furores?
Perrarum genus illorum,qui maximus eſſe
Debebat numerus,rebus conſtanter omiſſis,
Poſt habitíſque aliis,quos recti cura ſequendi

Ceperit,& ueri dederit ſimulacra tueri.
Cęleſtes animæ,quas incoluere,beatas
Suſpiciunt ſine fine domos, & abeſſe querentes,
Quód reliquũ eſt,ĩhiãt animis,& mẽte morãtur.
Nec terras meminere procul ſpectare iacentes.
Hi tales,ſtudio quibus eſt ſapientia,ſunto
Philoſophi,& meritum me iudice nomẽ habẽto.
Addidit,útque illic hominum liberrima ſors eſt,
Qui ſpectant, rerúmque aliis cõmercia cedunt,
Sic ſtudiis cunctis,animos quæ plurima uerſant,
Natura indagare uias atque abdita pręſtat.
Sed neq; Pythagoras tanto modò nobilis author
Nomine,quin rebus multo magis amplificatis
Floruit:atque animos cultu molliuit agreſtes.
Magna prius per quę ter maxima Græcia creuit.
Hæc mihi dictabat,uacua dum lentus in umbra
Rure ſuburbano inſtantes leuat arte ruinas
Labentis patriæ,& curarum Tullius æſtum,
Purus & ipſe fluens Graiorum fontibus hauſtis
Tullius,in Latium peregrinas doctus Athenas
Ferre,ſuóſque nouis opibus ditare Quirites.
Materię ille quidẽ,numeros ſed Phœbus & artẽ
Sufficit,ulla modo noſtri ſi carminis eſt ars.

FINIS.

BIBLIOTECA NAZ. ROMA VITTORIO EMANUELE

FINE

R

A. PANDIMIGLIO
RESTAURO
DI
LIBRI - ROMA